

## Démonstrations ayant valeur de modèle

### (restitution organisée de connaissances, ROC)

On peut lire dans le programme :

Plusieurs démonstrations, ayant valeur de modèle, sont repérées par le symbole  $\square$ . Certaines sont exigibles et correspondent à des capacités attendues.

Vous trouverez ci-dessous toutes les démonstrations marquées par le symbole  $\square$  dans le programme, celles qui sont exigibles sont désignées par l'acronyme ROC.

## I Suites

### Théorème

ROC

Si

- pour tout entier  $n$  à partir d'un certain rang,  $u_n \leq v_n$  ;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ ,

alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty.$$

*Démonstration.* Soit  $A$  un réel quelconque.

- il existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \geq N_0, u_n \leq v_n$  car à partir d'un certain rang,  $u_n \leq v_n$  ;
  - il existe  $N_1 \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \geq N_1, A \leq u_n$  car  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ ,
- donc pour tout  $n \geq \max(N_0; N_1), A \leq v_n$ .

On en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ .  $\square$

### Propriété

Si une suite est croissante et admet pour limite  $l$ , alors tous les termes de la suites sont inférieurs ou égaux à  $l$ .

*Démonstration.* Soit  $(u_n)$  une suite croissante qui converge vers  $l$ . Montrons que  $(u_n)$  est majorée par  $l$ .

Supposons qu'il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $u_k > l$ . Comme la suite  $(u_n)$  est croissante alors pour tout  $n \geq k, u_n > l$ .

On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ , donc tout intervalle ouvert contenant  $l$  contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Mais, si  $k$  existe, cela n'est pas possible car l'intervalle ouvert  $]l - 1; u_k[$  contient  $l$  mais ne contient aucun terme  $u_n$  tel que  $n \geq k$ . L'entier  $k$  ne peut donc pas exister, la suite  $(u_n)$  est donc majorée par  $l$ .  $\square$

### Théorème

ROC

Si  $q > 1$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ .

*Démonstration.* Pour faire cette démonstration on a besoin, dans un premier temps, d'établir l'inégalité de Bernoulli :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in \mathbb{R}^+, (1 + a)^n \geq 1 + na.$$

Soit  $P_n$  la propriété:  $(1 + a)^n \geq 1 + na$ . Montrons par récurrence sur  $\mathbb{N}$  que  $P_n$  est vraie.

- *Initialisation* :  $(1 + a)^0 = 1$  et  $1 + 0 \times 1 = 1$  donc  $P_0$  est vraie.
- *Hérédité* : Montrons que pour tout  $n \in \mathbb{N}, P_n \Rightarrow P_{n+1}$ .

$$\begin{aligned} (1 + a)^n \geq 1 + na &\implies (1 + a)(1 + a)^n \geq (1 + a)(1 + na) \\ &\implies (1 + a)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)a + na^2 \geq 1 + (n + 1)a \\ &\implies (1 + a)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)a \end{aligned}$$

On a montré que  $P_n$  implique  $P_{n+1}$ .

- *Conclusion* : Pour tout  $n \in \mathbb{N}, (1 + a)^n \geq 1 + na$ .

Si  $q > 1$  alors il existe  $a > 0$  tel que  $q = 1 + a$  et donc, pour tout  $n \in \mathbb{N}, q^n \geq 1 + na$ . Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + na) = +\infty$ , en appliquant le théorème de comparaison, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty. \quad \square$$

### Propriété

Si  $(u_n)$  est suite croissante non majorée alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

*Démonstration.* Soit  $(u_n)$  une suite croissante non majorée.

Pour tout  $M \in \mathbb{R}$ , il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $u_k \geq M$  car sinon  $(u_n)$  serait majorée.

Comme  $(u_n)$  est croissante, pour tout  $n \geq k, u_n \geq M$ . On en déduit que tout intervalle de la forme  $[M; +\infty[$  contient tous les  $u_n$  à partir d'un certain rang, c'est à dire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .  $\square$

## II Fonction exponentielle

### Théorème

(et définition) ROC

Il existe une unique fonction  $f$ , définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que

$$f' = f \text{ et } f(0) = 1.$$

On appelle cette fonction, la fonction exponentielle et on la note  $\exp$ .

L'existence est admise, il s'agit de démontrer l'unicité. La démonstration se fait en deux temps, le premier étant de montrer que la fonction exponentielle ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$ . La partie exigible ne concerne que la deuxième partie.

*Démonstration.*  $f$  est une fonction définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

- *Première partie :* montrons que si  $f$  est solution de  $f' = f$  et  $f(0) = 1$  alors pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) \neq 0$ .

Posons  $u(x) = f(x) \times f(-x)$ .  $u$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} u'(x) &= f'(x)f(-x) + f(x) \times (-f'(-x)) \\ &= f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x) \\ &= f(x)f(-x) - f(x)f(-x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit que  $u$  est une fonction constante, c'est à dire que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $u(x) = C$  où  $C$  est un réel fixé.

$u(0) = f(0)f'(0) = 1$  donc pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $u(x) = 1$ .

Si il existe  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $f(a) = 0$  alors  $u(a) = 0$ , ce qui est impossible. On en déduit que  $f$  ne peut pas s'annuler.

- *Deuxième partie :* (exigible) montrons que la solution de  $f' = f$  et  $f(0) = 1$  est unique.

Supposons que  $f_1$  et  $f_2$  soient deux solutions. Comme, d'après ce qui précède,  $f_2$  ne s'annule pas, on peut poser, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$g(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

$g$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme quotient de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \frac{f_1'(x)f_2(x) - f_1(x)f_2'(x)}{(f_2(x))^2} = \frac{f_1(x)f_2(x) - f_1(x)f_2(x)}{(f_2(x))^2} = 0.$$

$g$  est donc constante sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $g(x) = g(0) = \frac{f_1(0)}{f_2(0)} = 1$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a donc  $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 1$ , c'est à dire  $f_1(x) = f_2(x)$ .

Il existe donc une unique solution  $f$  telle que  $f' = f$  et  $f(0) = 1$ .

□

**Propriété**

**ROC**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

*Démonstration.*


- On va montrer en utilisant le théorème de comparaison que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ .

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par,  $f(x) = e^x - x$ .

$f$  est dérivable sur  $[0; +\infty[$  et pour tout  $x \in [0; +\infty[$ ,  $f'(x) = e^x - 1$ .

Comme la fonction exponentielle est croissante sur  $\mathbb{R}$  et que  $e^0 = 1$ , pour tout  $x \in [0; +\infty[$ ,  $e^x \geq 1$ .

On en déduit que pour tout  $x \in [0; +\infty[$ ,  $f'(x) \geq 0$ . La fonction  $f$  est donc croissante sur  $[0; +\infty[$ .

$x$	0	$+\infty$
<b>Sgn.</b> $f'(x)$	+	
<b>Var.</b> $f$	1 	

Comme  $f(0) = 1$ , on en déduit que pour tout  $x \in [0; +\infty[$ ,  $f(x) \geq 1$ , c'est à dire

$$e^x \geq x + 1.$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 = +\infty$  donc, en utilisant le théorème de comparaison,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ .

- Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $e^x = \frac{1}{e^{-x}}$  et donc, en posant  $-x = X$ ,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{-x}} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^X} = 0 \text{ car } \lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty.$$

□

**III Intégration**

**Théorème**

Soit  $f$  une fonction continue et positive sur un intervalle  $[a; b]$ .

La fonction  $F$  définie sur  $[a; b]$  par :

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

est dérivable sur l'intervalle  $[a; b]$  et pour tout réel  $x$  de  $[a; b]$ ,  $F'(x) = f(x)$ .

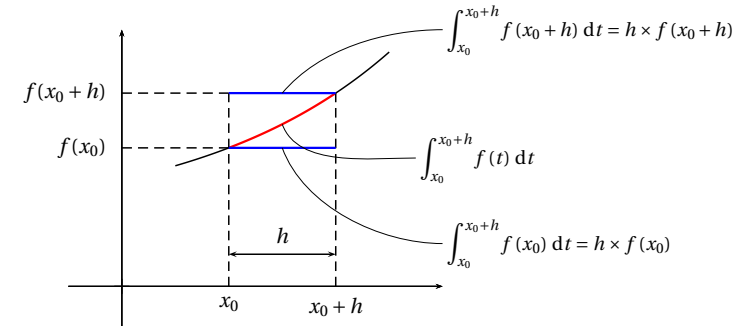
*Démonstration.* (On se place dans le cas où  $f$ , en plus d'être continue et positive, est croissante sur  $[a; b]$ )

Soit  $x_0 \in [a; b]$  et  $h \in \mathbb{R}^*$  tel que  $x_0 + h \in [a; b]$ .

Montrons que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0).$$

- Cas où  $h > 0$  :



$$\begin{aligned} F(x_0 + h) - F(x_0) &= \int_a^{x_0+h} f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \\ &= \int_a^{x_0} f(t) dt + \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \\ &= \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt \end{aligned}$$

$f$  est croissante sur  $[a; b]$  donc,  $\forall t \in [x_0; x_0 + h]$ ,  $f(x_0) \leq f(t) \leq f(x_0 + h)$ . En intégrant entre  $x_0$  et  $x_0 + h$  on obtient les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0) dt &\leq \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt \leq \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0 + h) dt \\ h \times f(x_0) &\leq \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt \leq h \times f(x_0 + h) \\ f(x_0) &\leq \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt}{h} \leq f(x_0 + h) \\ f(x_0) &\leq \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \leq f(x_0 + h). \end{aligned}$$

Comme  $f$  est continue sur  $[a; b]$ ,  $\lim_{h \rightarrow 0^+} f(x_0 + h) = f(x_0)$ . En appliquant le théorème des gendarmes à l'encadrement précédent, on obtient :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0).$$

• Cas où  $h < 0$  :

$F(x_0 + h) - F(x_0) = -(F(x_0) - F(x_0 + h)) = -\int_{x_0+h}^{x_0} f(t) dt$ .  
 $\forall t \in [x_0 + h; x_0]$ ,  $f(x_0 + h) \leq f(t) \leq f(x_0)$  car  $f$  est croissante sur  $[a; b]$ .  
 En intégrant entre  $x_0 + h$  et  $x_0$  on obtient les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \int_{x_0+h}^{x_0} f(x_0 + h) dt &\leq \int_{x_0+h}^{x_0} f(t) dt \leq \int_{x_0+h}^{x_0} f(x_0) dt \\ -h \times f(x_0 + h) &\leq \int_{x_0+h}^{x_0} f(t) dt \leq -h \times f(x_0) \\ f(x_0 + h) &\leq \frac{\int_{x_0+h}^{x_0} f(t) dt}{-h} \leq f(x_0) \\ f(x_0 + h) &\leq \frac{-\int_{x_0+h}^{x_0} f(t) dt}{h} \leq f(x_0) \\ f(x_0 + h) &\leq \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \leq f(x_0). \end{aligned}$$

Comme  $f$  est continue sur  $[a; b]$ ,  $\lim_{h \rightarrow 0^-} f(x_0 + h) = f(x_0)$ . En appliquant le théorème des gen-

darmes à l'encadrement précédent, on obtient :

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} &= f(x_0). \\ \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0) \text{ donc } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0). \end{aligned}$$

On en déduit que pour tout  $x_0 \in [a; b]$ ,  $F$  est dérivable en  $x_0$  et que  $F'(x_0) = f(x_0)$ .  $\square$

**Théorème**

Toute fonction continue  $f$  sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

Dans la démonstration précédente, on a montré qu'une fonction continue et **positive** admet une primitive, il s'agit maintenant de généraliser ce résultat à des fonctions continues quelconques sur un intervalle fermé. Pour cela on va se ramener au cas des fonctions positives en admettant qu'une fonction continue sur un intervalle fermé admet un minimum.

*Démonstration.* On se place dans le cas où  $f$  est définie sur l'intervalle fermé  $I = [a; b]$  et on admet que, dans ce cas,  $f$  admet un minimum  $m$  sur  $[a; b]$

$\forall x \in [a; b]$ ,  $m \leq f(x)$ , la fonction  $g : x \mapsto f(x) - m$  est donc positive sur  $[a; b]$ . Comme  $g$  est continue sur  $[a; b]$ ,  $g$  admet une primitive  $G$  sur  $[a; b]$ .

Considérons la fonction  $F : x \mapsto G(x) + mx$  définie sur  $[a; b]$ .  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $[a; b]$  car  $F$  est dérivable sur  $[a; b]$  et

$$F'(x) = G'(x) + m = g(x) + m = f(x) - m + m = f(x).$$

$\square$

**IV Droites et plans**

**Théorème**

(du toit)

Soient  $P_1$  et  $P_2$  deux plans sécants selon une droite  $\Delta$  et  $d_1$  et  $d_2$  deux droites.

**Si**

$d_1$  et  $d_2$  sont parallèles et telles que  $d_1 \subset P_1$  et  $d_2 \subset P_2$

**alors**

l'intersection  $\Delta$  de  $P_1$  et  $P_2$  est parallèle aux droites  $d_1$  et  $d_2$ .

*Démonstration.*

Les droites  $d_1$  et  $d_2$  sont parallèles et possèdent donc un même vecteur directeur  $\vec{u}$ .

Soit  $\vec{v}$  un vecteur tel que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  dirigent le plan  $P_1$  et  $\vec{v}$  un vecteur tel que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  dirigent le plan  $P_2$ . Soit  $\vec{w}$  un vecteur directeur de la droite  $\Delta$ .

Dans le plan  $P_1$ , les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires, donc il existe des réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que

$$\vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}.$$

Dans le plan  $P_2$ , les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}'$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires, donc il existe des réels  $\alpha'$  et  $\beta'$  tels que

$$\vec{w} = \alpha' \vec{u} + \beta' \vec{v}'.$$

En soustrayant ces deux égalités on obtient

$$(\alpha - \alpha') \vec{u} + \beta \vec{v} - \beta' \vec{v}' = \vec{0}.$$

Mais vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{v}'$  ne sont pas coplanaires car sinon les plans  $P_1$  et  $P_2$  ne seraient pas sécants donc

$$\alpha - \alpha' = 0, \beta = 0 \text{ et } \beta' = 0 \text{ (*)}.$$

On en déduit que  $\vec{w} = \alpha \vec{u}$  et par conséquent,  $d_1$ ,  $d_2$  et  $\Delta$  sont parallèles. □

**Remarque: (\*)**

Si vous avez du mal à comprendre pourquoi, nécessairement,  $\alpha - \alpha' = \beta = \beta' = 0$ , vous pouvez considérer un point  $O$  quelconque et le repère  $(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{v}')$  (c'est bien un repère car les vecteurs ne sont pas coplanaires). Dans ce repère les coordonnées du vecteur  $(\alpha - \alpha') \vec{u} + \beta \vec{v} - \beta' \vec{v}'$  sont  $\alpha - \alpha'$ ,  $\beta$  et  $\beta'$  et comme ce vecteur est le vecteur nul, ses coordonnées sont nulles.

## V Produit scalaire

Théorème

ROC

- Tout plan de vecteur normal  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ,  $\vec{n} \neq \vec{0}$ , admet une équation cartésienne de la forme

$$ax + by + cz + d = 0$$

où  $d \in \mathbb{R}$ .

- Réciproquement, l'ensemble des points  $M(x; y; z)$  tels que  $ax + by + cz + d = 0$  avec  $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$  et  $d \in \mathbb{R}$  est un plan de vecteur normal  $\vec{n}$ .

*Démonstration.*

- Soit  $P$  un plan,  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ,  $\vec{n} \neq \vec{0}$ , un vecteur normal à  $P$  et  $A(x_A; y_A; z_A)$  un point de  $P$ .

$$\begin{aligned} M(x; y; z) \in P &\iff \vec{AM} \cdot \vec{n} = 0 \\ &\iff a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0 \\ &\iff ax + by + cz - (ax_A + by_A + cz_A) = 0 \end{aligned}$$

Avec  $d = -(ax_A + by_A + cz_A)$ ,  $ax + by + cz - (ax_A + by_A + cz_A) = 0$  est bien de la forme  $ax + by + cz + d = 0$ .

- Réciproquement: Comme  $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$  il existe  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  tel que  $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$ . Effectivement, supposons que  $a \neq 0$ , alors, quelques soient les réels  $y_0$  et  $z_0$ , si  $x_0 = \frac{d - by_0 - cz_0}{a}$  alors  $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$ . Il existe donc bien un point  $M_0$  dont les coordonnées vérifient la

relation  $ax + by + cz + d = 0$ .

Soit  $M(x; y; z)$  un point de l'espace tel que  $ax + by + cz + d = 0$ . En soustrayant cette relation avec la précédente on obtient  $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$  qui équivaut à  $\vec{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$  où  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ . L'ensemble des points dont les coordonnées vérifient l'équation  $ax + by + cz + d = 0$  est donc le plan passant par  $M_0$  et de vecteur normal  $\vec{n}$ . □

Propriété

Une droite est orthogonale à toute droite d'un plan si, et seulement si, elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

*Démonstration.*

$\Rightarrow$  Le résultat est immédiat, puisque la droite est orthogonale à toute droite du plan, elle est, en particulier, orthogonale à deux droites sécantes.

$\Leftarrow$  On suppose que la droite  $(d)$  est orthogonale à deux droites sécantes  $(d_1)$  et  $(d_2)$  qui déterminent un plan  $(P)$ .

Soient  $\vec{u}_1$ ,  $\vec{u}_2$  et  $\vec{u}$  des vecteurs directeurs respectifs de  $(d_1)$ ,  $(d_2)$  et  $(d)$ .

Soit  $(d')$  une droite quelconque de  $(P)$  de vecteur directeur  $\vec{w}$ . Comme  $(d')$  est contenue dans  $(P)$  et que  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$  ne sont pas colinéaires, il existe deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $\vec{w} = \alpha \vec{u}_1 + \beta \vec{u}_2$ .

Montrons que  $(d')$  est orthogonale à  $(d)$  :

$\vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (\alpha \vec{u}_1 + \beta \vec{u}_2) = \alpha \vec{u} \cdot \vec{u}_1 + \beta \vec{u} \cdot \vec{u}_2 = 0$ . Les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{w}$  sont orthogonaux donc les droites  $(d)$  et  $(d')$  sont orthogonales. □

## VI Probabilités conditionnelles

### Théorème

### ROC

Si A et B sont indépendants alors  $\bar{A}$  et B aussi.

*Démonstration.*

Comme  $A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$  et que  $(A \cap B) \cap (A \cap \bar{B}) = \emptyset$ ,

$$\begin{aligned} P(A) &= P((A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})) \\ &= P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) - P((A \cap B) \cap (A \cap \bar{B})) \\ &= P(A) \times P(B) + P(A \cap \bar{B}) \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} P(A \cap \bar{B}) &= P(A) - P(A) \times P(B) \\ &= P(A)(1 - P(B)) \\ &= P(A) \times P(\bar{B}). \end{aligned}$$

Les événements A et  $\bar{B}$  sont donc indépendants. □

## VII lois à densité

### Propriété

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ .

X vérifie la propriété de durée de vie sans vieillissement : pour tous réels positifs t et h,

$$P_{X \geq t}(X \geq t+h) = P(X \geq h).$$

*Démonstration.*

X suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  donc, pour tout réel positif u :

$$P(X \leq u) = \int_0^u \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_0^u = 1 - e^{-\lambda u}$$

et

$$P(X \geq u) = 1 - P(X \leq u) = e^{-\lambda u}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} P_{X \geq t}(X \geq t+h) &= \frac{P((X \geq t+h) \cap (X \geq t))}{P(X \geq t)} \\ &= \frac{P(X \geq t+h)}{P(X \geq t)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} \\ &= e^{-\lambda h} \\ &= P(X \geq h). \end{aligned}$$

□

### Propriété

### ROC

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ .

X admet une espérance E(X) définie par :

$$E(X) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt$$

et

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

*Démonstration.*

Pour calculer E(X) il faut dans un premier temps déterminer une primitive de la fonction  $f : t \mapsto \lambda t e^{-\lambda t}$  définie sur  $[0; +\infty[$ , avec  $\lambda > 0$ .

Cherchons une primitive de la forme  $F(t) = (at + b) e^{-\lambda t}$ .

$$F'(t) = a e^{-\lambda t} - \lambda (at + b) e^{-\lambda t} = (-\lambda at + a - \lambda b) e^{-\lambda t}.$$

Pour que F soit une primitive de f sur  $[0; +\infty[$  il suffit que  $-\lambda a = \lambda$  et  $a - \lambda b = 0$ . C'est à dire  $a = -1$  et  $b = -\frac{1}{\lambda}$ .

On obtient alors, pour tout  $t \in [0; +\infty[$ ,

$$F(t) = \left(-t - \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda t}.$$

Déterminons E(X) :

$$\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt = [F(t)]_0^x = \left(-x - \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda} = \frac{-\lambda x}{\lambda} e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda}.$$

Comme  $\lambda > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\lambda x e^{-\lambda x} = \lim_{X \rightarrow -\infty} X e^X = 0$ , avec  $X = -\lambda x$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\lambda x} = 0$ .

Par opération sur les limites, on en déduit que,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{-\lambda x}{\lambda} e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$$

c'est à dire :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

□

**Théorème**

**ROC**

Soit  $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0; 1)$ .

Pour tout réel  $\alpha \in ]0; 1[$ , il existe un unique réel positif  $u_\alpha$  tel que

$$P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$$

*Démonstration.*

Soit  $G$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par

$$G(x) = P(-x \leq X \leq x) = \int_{-x}^x f(t) dt$$

où  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ .

Si  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ , alors :

$$\forall x \in ]0; +\infty[, G(x) = [F(t)]_{-x}^x = F(x) - F(-x).$$

$G$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ ,  $G'(x) = f(x) + f(-x)$ .

Or, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) > 0$  donc, pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ ,  $G'(x) > 0$ .

- $G$  est une fonction continue et strictement croissante sur  $]0; +\infty[$ ,
- $G(0) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 1$ ,
- comme  $0 < \alpha < 1$ ,  $G(0) < 1 - \alpha < \lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)$ ,

donc, d'après le théorème de la bijection (corollaire du théorème des valeurs intermédiaires ou théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones), il existe un unique réel strictement positif  $u_\alpha$  tel que  $G(u_\alpha) = 1 - \alpha$ . □

### VIII Fluctuation, estimation

**Théorème**

**ROC**

Si la variable aléatoire  $X_n$  suit la loi binomiale  $\mathcal{B}(n, p)$ , avec  $p$  dans l'intervalle  $]0; 1[$ , alors

pour tout  $\alpha$  dans  $]0; 1[$ , et pour  $I_n = \left[ p - u_\alpha \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; p + u_\alpha \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$  où  $u_\alpha$  vérifie

$P(-u_\alpha \leq Z \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$  avec  $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0; 1)$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\frac{X_n}{n} \in I_n\right) = 1 - \alpha.$$

$I_n$  est appelé **Intervalle de fluctuation asymptotique de  $F_n$  au seuil de  $1 - \alpha$**

La variable  $F_n = \frac{X_n}{n}$  correspond à la fréquence de succès lors de la répétition de  $n$  épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre  $p$

*Démonstration.*

On pose  $Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{n}{\sqrt{n}} \frac{\frac{X_n}{n} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} = \frac{\frac{X_n}{n} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$ .

$$\begin{aligned} \frac{X_n}{n} \in I_n &\iff p - u_\alpha \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + u_\alpha \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \\ &\iff -u_\alpha \leq \frac{\frac{X_n}{n} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \leq u_\alpha \\ &\iff -u_\alpha \leq Z_n \leq u_\alpha. \end{aligned}$$

D'après le théorème de de Moivre Laplace

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(-u_\alpha \leq Z_n \leq u_\alpha) = P(-u_\alpha \leq Z \leq u_\alpha)$$

où  $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ , on a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\frac{X_n}{n} \in I_n\right) = 1 - \alpha.$$

□

**Propriété**

Soient  $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ ,  $F_n = \frac{X_n}{n}$  et l'intervalle aléatoire  $J_n = \left[ F_n - \frac{1}{\sqrt{n}}; F_n + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ .

Pour  $n$  assez grand, l'intervalle  $J_n$  contient  $p$  avec une probabilité au moins égale à 95 %.

*Démonstration.*

- Montrons dans un premier temps que si la variable aléatoire  $X_n$  suit la loi  $\mathcal{B}(n, p)$ , alors pour tout réel  $p$  de  $]0; 1[$ , il existe un entier  $n_0$  tel que, si  $n \geq n_0$ , alors  $P\left(p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) > 0,95$ .

Soit la variable aléatoire  $Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ , et la suite  $(a_n)$  définie pour tout entier  $n \geq 1$ , par

$$a_n = P(-2 \leq Z_n \leq 2).$$

D'après le théorème de de Moivre Laplace,  $(a_n)$  converge vers  $\ell$  avec :  $\ell = P(-2 \leq Z \leq 2)$  où  $Z$  suit la loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

On détermine, à l'aide de la calculatrice,  $\ell \approx 0,9545$  donc  $\ell \geq 0,954$ .

Soit un réel  $\epsilon$  tel que :  $0 < \epsilon < 0,004$  (ainsi  $1 - \epsilon \geq 0,95$ ). Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell$ , il existe  $n_0$  tel que, si  $n \geq n_0$ , alors  $a_n \in ]\ell - \epsilon; \ell + \epsilon[$ .

Ainsi pour  $n \geq n_0$ ,  $a_n \geq 0,95$ .

Comme  $Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ ,

$$a_n = P(-2 \leq Z_n \leq 2) = P\left(p - 2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + 2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$$

donc

$$a_n \geq 0,95 \iff P\left(p - 2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + 2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) \geq 0,95.$$

Soit  $\Phi$  la fonction définie sur  $[0; 1]$  par  $\Phi(p) = p(1-p)$ .

Cette fonction polynôme du second degré admet un maximum en  $\frac{1}{2}$ , de valeur  $\Phi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ .

Ainsi  $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$  donc  $\sqrt{p(1-p)} \leq \frac{1}{2}$  et donc  $\frac{2}{\sqrt{n}}\sqrt{p(1-p)} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ .

On en déduit que

$$\left[p - 2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; p + 2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] \subset \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

et par conséquent, pour  $n \geq n_0$ ,

$$P\left(p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq 0,95.$$

- Montrons que pour  $n$  assez grand, l'intervalle  $\left[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}}; F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$  contient  $p$  avec une probabilité au moins égale à 95 %.

Puisque  $F_n = \frac{X_n}{n}$ , d'après ce qui précède, pour  $n$  assez grand :

$$P\left(F_n \in \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]\right) \geq 0,95.$$

$$\text{Or } F_n \in \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] \iff p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p + \frac{1}{\sqrt{n}} \iff F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq p \leq F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

On en déduit que pour  $n$  assez grand

$$P\left(p \in \left[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}}; F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]\right) \geq 0,95.$$

□