

Exercice 7 : suites (somme de termes)

EXERCICE 1 correction Polynésie 2015

Soit (v_n) la suite définie par

$$v_1 = \ln(2) \quad \text{et, pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } v_{n+1} = \ln(2 - e^{-v_n}).$$

On admet que cette suite est définie pour tout entier naturel n non nul.

On définit ensuite la suite (S_n) pour tout entier naturel n non nul par :

$$S_n = \sum_{k=1}^n v_k = v_1 + v_2 + \dots + v_n.$$

Le but de cet exercice est de déterminer la limite de (S_n) .

Partie A -- Conjectures à l'aide d'un algorithme

1. Recopier et compléter l'algorithme suivant qui calcule et affiche la valeur de S_n pour une valeur de n choisie par l'utilisateur :

Variables :	n, k entiers S, v réels
Initialisation :	Saisir la valeur de n v prend la valeur ... S prend la valeur ...
Traitement :	Pour k variant de ... à ... faire ...prend la valeurprend la valeur ... Fin Pour
Sortie :	Afficher S

2. À l'aide de cet algorithme, on obtient quelques valeurs de S_n . Les valeurs arrondies au dixième sont données dans le tableau ci-dessous :

n	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000
S_n	2,4	4,6	6,9	9,2	11,5	13,8

En expliquant votre démarche, émettre une conjecture quant au comportement de la suite (S_n) .

Partie B -- Étude d'une suite auxiliaire

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la suite (u_n) par $u_n = e^{v_n}$.

1. Vérifier que $u_1 = 2$ et que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n}$.
2. Calculer u_2, u_3 et u_4 . Les résultats seront donnés sous forme fractionnaire.
3. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \frac{n+1}{n}$.

Partie C -- Étude de (S_n)

1. Pour tout entier naturel n non nul, exprimer v_n en fonction de u_n , puis v_n en fonction de n .
2. Vérifier que $S_3 = \ln(4)$.
3. Pour tout entier naturel n non nul, exprimer S_n en fonction de n . En déduire la limite de la suite (S_n) .

Correction

EXERCICE 1 énoncé Polynésie 2015

Partie A -- Conjectures à l'aide d'un algorithme

1.

Variables :	n, k entiers S, v réels		
Initialisation :	Saisir la valeur de n v prend la valeur $\ln(2)$ S prend la valeur v		
Traitement :	Pour k variant de 2 à n faire <table style="margin-left: 20px; border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;">v prend la valeur $\ln(2 - e^{-v})$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">S prend la valeur $S + v$</td> </tr> </table> Fin Pour	v prend la valeur $\ln(2 - e^{-v})$	S prend la valeur $S + v$
v prend la valeur $\ln(2 - e^{-v})$			
S prend la valeur $S + v$			
Sortie :	Afficher S		

2. D'après les valeurs affichées il semble que la suite (S_n) soit croissante.

Partie B -- Étude d'une suite auxiliaire

1. On a $u_1 = e^{v_1} = e^{\ln(2)} = 2$.

Pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = e^{v_{n+1}} = e^{\ln(2 - e^{-v_n})} = (2 - e^{-v_n}) =$

$$2 - \frac{1}{e^{v_n}} = 2 - \frac{1}{u_n} = u_{n+1}.$$

2. D'après le résultat précédent :

$$u_2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2};$$

$$u_3 = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3};$$

$$u_4 = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}.$$

3. Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{n+1}{n}$.

Soit P_n la propriété : $u_n = \frac{n+1}{n}$.

□ *Initialisation* : $u_1 = 2 = \frac{1+1}{1}$ donc P_1 est vraie.

□ *Hérédité* : Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n \implies P_{n+1}$.

$$u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n} = 2 - \frac{n}{n+1} = \frac{2n+2-n}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$$

On a montré que P_n implique P_{n+1} .

□ *Conclusion* : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{n+1}{n}$.

Partie C -- Étude de (S_n)

1. Pour tout entier naturel n non nul,

$$u_n = e^{v_n} \implies v_n = \ln u_n.$$

La question précédente nous permet écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \ln \frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln(n).$$

2. $S_3 = v_1 + v_2 + v_3 = \ln(2) - \ln(1) + \ln(3) - \ln(2) + \ln(4) - \ln(3) = \ln(4) - \ln(1) = \ln(4)$.

3.

$$S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$$

$$= \ln(2) - \ln(1) + \ln(3) - \ln(2) + \ln(4) - \ln(3) + \dots + \ln(n) - \ln(n-1) + \ln(n+1) - \ln(n)$$

$$= \ln(n+1)$$

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$. La suite (S_n) est divergente.