Exercice 7 : suites entremélées

Exercice 1 correction Nouvelle Calédonie 2013

Soient deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 2$ et $v_0 = 10$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}.$$

PARTIE A

On considère l'algorithme suivant :

```
Variables :  N est un entier
             U,V,W sont des réels
             K est un entier
Début :      Affecter 0 à K
             Affecter 2 à U
             Affecter 10 à V
             Saisir N
             Tant que K < N
                 Affecter K + 1 à K
                 Affecter U à W
                 Affecter (2U + V)/3 à U
                 Affecter (W + 3V)/4 à V
             Fin tant que
             Afficher U
             Afficher V
Fin
```

On exécute cet algorithme en saisissant $N = 2$. Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous donnant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme.

K	W	U	V
0			
1			
2			

PARTIE B

1. (a) Montrer que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{5}{12}(v_n - u_n)$.

(b) Pour tout entier naturel n on pose $w_n = v_n - u_n$.

Montrer que pour tout entier naturel n, $w_n = 8\left(\frac{5}{12}\right)^n$.

2. (a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

(b) Déduire des résultats des questions 1. b. et 2. a. que pour tout entier naturel n on a $u_n \leqslant 10$ et $v_n \geqslant 2$.

(c) En déduire que tes suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

3. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) ont la même limite.

4. Montrer que la suite (t_n) définie par $t_n = 3u_n + 4v_n$ est constante.

En déduire que la limite commune des suites (u_n) et (v_n) est $\frac{46}{7}$.

Correction

Exercice 1 énoncé Nouvelle Calédonie 2013

Soient deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 2$ et $v_0 = 10$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par
$u_{n+1} = \dfrac{2u_n + v_n}{3}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4}$

PARTIE A

```
Variables :  N est un entier
             U,V,W sont des réels
             K est un entier
Début :      Affecter 0 à K
             Affecter 2 à U
             Affecter 10 à V
             Saisir N
             Tant que K < N
                  Affecter K+1 à K
                  Affecter U à W
                  Affecter (2U+V)/3 à U
                  Affecter (W+3V)/4 à V
             Fin tant que
             Afficher U
             Afficher V
Fin
```

État des variables :

K	W	U	V
0	---	2	10
1	2	14/3	8
2	14/3	52/9	43/6

PARTIE B

1. (a) Pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} - \frac{2u_n + v_n}{3} = \frac{3(u_n + 3v_n)}{12} - \frac{4(2u_n + v_n)}{12}$$
$$= \frac{3u_n + 9v_n - 8u_n - 4v_n}{12} = \frac{5v_n - 5u_n}{12} = \frac{5}{12}(v_n - u_n)$$

(b) Pour tout entier naturel n on pose $w_n = v_n - u_n$.

D'après la question précédente, on peut dire que la suite (w_n) est géométrique de raison $\dfrac{5}{12}$ et de premier terme $w_0 = v_0 - u_0 = 10 - 2 = 8$.

D'après le cours (forme explicite d'une suite géométrique) on peut dire que, pour tout entier naturel n, $w_n = 8\left(\dfrac{5}{12}\right)^n$.

2. (a) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2u_n + v_n}{3} - \dfrac{3u_n}{3} = \dfrac{2u_n + v_n - 3u_n}{3} = \dfrac{v_n - u_n}{3} = \dfrac{w_n}{3}$

On a vu que, pour tout n, $w_n = 8\left(\dfrac{5}{12}\right)^n$; on peut en déduire que pour tout n, $w_n > 0$ et donc que, pour tout n, $u_{n+1} - u_n > 0$.

Donc la suite (u_n) est croissante.

$v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n + 3v_n}{4} - \dfrac{4v_n}{4} = \dfrac{u_n + 3v_n - 4v_n}{4} = \dfrac{u_n - v_n}{4} = \dfrac{-w_n}{4}$

Et comme $w_n > 0$, on peut dire que $v_{n+1} - v_n < 0$ pour tout n.

Donc la suite (v_n) est décroissante.

(b) On a vu que, pour tout n, $w_n > 0$; donc, pour tout n, $v_n - u_n > 0$ c'est-à-dire $v_n > u_n$.

La suite (v_n) est décroissante donc, pour tout n, $v_n \leqslant v_0 \iff v_n \leqslant 10$.

Pour tout entier naturel n, $\left.\begin{array}{r} v_n > u_n \\ v_n \leqslant 10 \end{array}\right\} \Longrightarrow u_n \leqslant 10$.

La suite (u_n) est croissante donc pour tout n, $u_n \geqslant u_0 \iff u_n \geqslant 2$.

Pour tout entier naturel n, $\left.\begin{array}{r} v_n > u_n \\ u_n \geqslant 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow v_n \geqslant 2$.

(c) La suite (u_n) est croissante majorée par 10 donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente vers un réel ℓ_u.

La suite (v_n) est décroissante minorée par 2 donc, d'après ce même théorème, la suite (v_n) est convergente vers un réel ℓ_v.

3. La suite (w_n), définie par $w_n = v_n - u_n$, est convergente comme différence de deux suites convergentes, et sa limite est égale à $\ell_v - \ell_u$.

Or la suite (w_n) est géométrique de raison $\dfrac{5}{12}$ et $-1 < \dfrac{5}{12} < 1$; donc on peut dire que la suite (w_n) est convergente vers 0.

La limite d'une suite est unique donc $\ell_v - \ell_u = 0$ et donc $\ell_v = \ell_u$; les suites (u_n) et (v_n) ont donc la même limite qu'on appelle ℓ.

4. $t_{n+1} = 3u_{n+1} + 4v_{n+1} = 3 \times \dfrac{2u_n + v_n}{3} + 4 \times \dfrac{u_n + 3v_n}{4} = 2u_n + v_n + u_n + 3v_n$

$= 3u_n + 4v_n = t_n$ donc la suite (t_n) est constante.

$t_0 = 3u_0 + 4v_0 = 3 \times 2 + 4 \times 10 = 6 + 40 = 46$

Comme la suite (t_n) est constante, pour tout n, $t_n = t_0 = 46$; la suite (t_n) est donc convergente vers 46.

Les suites (u_n) et (v_n) sont toutes les deux convergentes vers ℓ donc la suite (t_n) définie par $t_n = 3u_n + 4v_n$ est convergente vers $3\ell + 4\ell = 7\ell$.

La limite d'une suite est unique par conséquent $7\ell = 46$.

$$7\ell = 46 \iff \ell = \frac{46}{7}.$$

La limite commune des suites (u_n) et (v_n) est donc $\dfrac{46}{7}$.