

**Exercice 6 : suites** ( $u_n = \int_a^b f_n(x) dx$ )

**EXERCICE 1** correction **Asie 2014**

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 1.

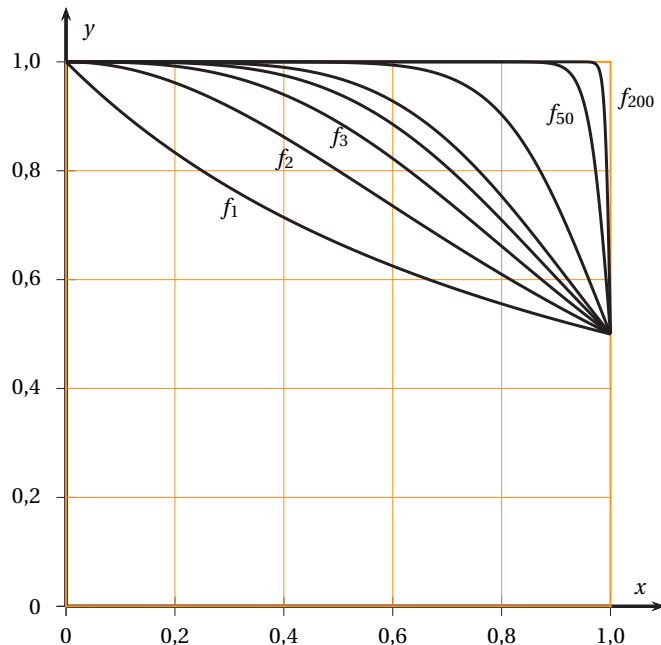
On note  $f_n$  la fonction définie pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0; 1]$  par

$$f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}.$$

Pour tout entier  $n \geq 1$ , on définit le nombre  $I_n$  par

$$I_n = \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx.$$

1. Les représentations graphiques de certaines fonctions  $f_n$  obtenues à l'aide d'un logiciel sont tracées ci-après.



En expliquant soigneusement votre démarche, conjecturer, pour la suite  $(I_n)$  l'existence et la valeur éventuelle de la limite, lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

2. Calculer la valeur exacte de  $I_1$ .

3. (a) Démontrer que, pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0; 1]$  et pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on a :

$$\frac{1}{1+x^n} \leq 1.$$

(b) En déduire que, pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on a :  $I_n \leq 1$ .

4. Démontrer que, pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0; 1]$  et pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on a :

$$1-x^n \leq \frac{1}{1+x^n}.$$

5. Calculer l'intégrale  $\int_0^1 (1-x^n) dx$ .

6. À l'aide des questions précédentes, démontrer que la suite  $(I_n)$  est convergente et déterminer sa limite.

7. On considère l'algorithme suivant :

<b>Variables :</b>	$n, p$ et $k$ sont des entiers naturels $x$ et $I$ sont des réels
<b>Initialisation :</b>	$I$ prend la valeur 0
<b>Traitement :</b>	Demander un entier $n \geq 1$ Demander un entier $p \geq 1$ Pour $k$ allant de 0 à $p-1$ faire : $x$ prend la valeur $\frac{k}{p}$ $I$ prend la valeur $I + \frac{1}{1+x^n} \times \frac{1}{p}$ Fin Pour Afficher $I$

(a) Quelle valeur, arrondie au centième, renvoie cet algorithme si l'on entre les valeurs  $n = 2$  et  $p = 5$  ?

On justifiera la réponse en reproduisant et en complétant le tableau suivant avec les différentes valeurs prises par les variables, à chaque étape de l'algorithme. Les valeurs de I seront arrondies au millième.

$k$	$x$	I
0		
4		

(b) Expliquer pourquoi cet algorithme permet d'approcher l'intégrale  $I_n$ .

**Correction**

**EXERCICE 1** énoncé **Asie 2014**

Pour  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , on note  $f_n$  la fonction définie pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0 ; 1]$  par  $f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$ .

Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , on définit le nombre  $I_n$  par  $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx$ .

1. Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  et tout  $x$  de  $[0; 1]$ ,  $1+x^n > 0$  donc  $f_n(x) > 0$ .

Donc  $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$  est égale à l'aire du domaine délimité par la courbe représentant la fonction  $f_n$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x=0$  et  $x=1$ .

D'après le graphique, cette aire tend à se rapprocher de 1 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

2.  $I_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$

3. (a) Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  et tout  $x$  de  $[0; 1]$  :

$0 \leq x^n \leq 1 \iff 1 \leq 1+x^n \leq 2 \iff \frac{1}{1} \geq \frac{1}{1+x^n} \geq \frac{1}{2}$  donc  $\frac{1}{1+x^n} \leq 1$ .

(b) Pour tout  $x$  de  $[0; 1]$ ,  $\frac{1}{1+x^n} \leq 1$  donc, d'après la positivité de l'intégration :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx \leq \int_0^1 1 dx \iff I_n \leq [x]_0^1 \iff I_n \leq 1$$

4. Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  et pour tout  $x$ ,  $(x^n)^2 \geq 0$  donc  $1 - (x^n)^2 \leq 1$  ce qui équivaut à  $(1-x^n)(1+x^n) \leq 1$  et comme  $1+x^n > 0$  pour  $x \in [0; 1]$  :  $1-x^n \leq \frac{1}{1+x^n}$ .

5.  $\int_0^1 (1-x^n) dx = \left[ x - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \left[ 1 - \frac{1}{n+1} \right] - 0 = \frac{n}{n+1}$

6. On a vu que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  et tout réel  $x$  de  $[0; 1]$ ,  $1-x^n \leq \frac{1}{1+x^n}$ . D'après la positivité de l'intégration, on peut en déduire que  $\int_0^1 (1-x^n) dx \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx$  c'est-à-dire  $\frac{n}{n+1} \leq I_n$ .

On a vu aussi que pour tout  $n$ ,  $I_n \leq 1$ .

Donc, pour tout  $n$ ,  $\frac{n}{n+1} \leq I_n \leq 1$ .

On sait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$  ce qui équivaut à  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1$  et, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $\frac{n}{n+1} \leq I_n \leq 1$  ; donc, d'après le théorème des gendarmes, la suite  $(I_n)$  est convergente et a pour limite 1.

7. (a) On fait tourner l'algorithme proposé avec  $n=2$  et  $p=5$  :

$k$	$x$	$I$
0	0	0,2
1	0,2	0,392
2	0,4	0,565
3	0,6	0,712
4	0,8	0,834

La valeur de  $I$  arrondie au centième qui sera affichée est 0,83.

(b) Il faut reconnaître dans l'algorithme proposé la méthode des rectangles permettant de calculer des valeurs approchées d'aire sous une courbe ; plus précisément, comme la fonction  $f_n$  est décroissante sur  $[0; 1]$ , on obtient la somme de rectangles majorant l'intégrale  $I_n$  cherchée.

