

Exercice 5 : suites ($u_n = \int_a^b f_n(x) dx$)

EXERCICE 1 correction **Liban 2015**

On définit la suite (u_n) de la façon suivante :

pour tout entier naturel n , $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

1. Calculer $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$.

2. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}$.

(b) En déduire la valeur exacte de u_1 .

3. (a) Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il affiche en sortie le terme de rang n de la suite (u_n) où n est un entier naturel saisi en entrée par l'utilisateur.

Variables :	i et n sont des entiers naturels u est un réel
Entrée :	Saisir n
Initialisation :	Affecter à u la valeur ...
Traitement :	Pour i variant de 1 à ... Affecter à u la valeur ... Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

(b) À l'aide de cet algorithme, on a obtenu le tableau de valeurs suivant :

n	0	1	2	3	4	5	10	50	100
u_n	0,693 1	0,306 9	0,193 1	0,140 2	0,109 8	0,090 2	0,047 5	0,009 9	0,005 0

Quelles conjectures concernant le comportement de la suite (u_n) peut-on émettre ?

4. (a) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

(b) Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

5. On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) . Démontrer que $\ell = 0$.

Correction

EXERCICE 1 énoncé Liban 2015

1. Sur $[0; 1]$, $1 \leq 1+x \leq 2$, donc une primitive sur cet intervalle de

$x \mapsto \frac{1}{1+x}$ est $x \mapsto \ln(1+x)$. D'où :

$$u_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2.$$

2. (a) Par linéarité de l'intégrale :

$$u_{n+1} + u_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx + \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^{n+1} + x^n}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^n(x+1)}{1+x} dx = \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

(b) La relation précédente donne pour $n=0$,

$$u_1 + u_0 = 1 \iff u_1 = 1 - u_0 = 1 - \ln 2.$$

3. (a) • Il faut initialiser la suite à $u_0 = \ln 2$.

• La relation $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}$ s'écrit au rang précédent, soit pour $n \geq 1$, $u_n + u_{n-1} = \frac{1}{n}$, soit $u_n = -u_{n-1} + \frac{1}{n}$.

Pour passer d'un terme à l'autre il faut donc prendre l'opposé du terme précédent et ajouter $\frac{1}{n}$. D'où l'algorithme :

Variables :	i et n sont des entiers naturels ($n \geq 1$) u est un réel
Entrée :	Saisir n
Initialisation :	Affecter à u la valeur $\ln 2$
Traitement :	Pour i variant de 1 à n Affecter à u la valeur $-u + \frac{1}{i}$ FindePour
Sortie :	Afficher u

(b) Conjecture : il semble que la suite (u_n) soit décroissante vers zéro.

4. (a) Pour tout naturel n , $u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx =$

$$\int_0^1 \frac{x^{n+1} - x^n}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x} dx.$$

Or on a vu que sur $[0; 1]$, $1+x > 0$, $x^n \geq 0$ et $0 \leq x \leq 1 \iff$

$$-1 \leq x-1 \leq 0, \text{ donc finalement } \frac{x^n(x-1)}{1+x} \leq 0.$$

Conclusion : l'intégrale de cette fonction négative sur $[0; 1]$ est négative.

Or $u_{n+1} - u_n < 0$ quel que soit n montre que la suite (u_n) est décroissante.

(b) u_n intégrale d'une fonction positive sur $[0; 1]$ est quel que soit le naturel n , un nombre positif ou nul.

La suite (u_n) décroissante et étant minorée par zéro converge vers une limite ℓ , avec $\ell \geq 0$.

5. Pour tout naturel n , $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1} \Rightarrow 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$, puisque

$$u_{n+1} \geq 0.$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$.

Conclusion $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell = 0$.