Exercice 4 : suites ($u_{n+1} = f(u_n)$)

Exercice 1 correction **Nouvelle Calédonie 2014**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = 5 - \frac{4}{x+2}.$$

On admettra que f est dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
On a tracé en **annexe 1** dans un repère orthonormé la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f ainsi que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$.

1. Démontrer que f est croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

2. Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$. On note α la solution.

On donnera la valeur exacte de α puis on en donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Sur la figure de **annexe 1**, en utilisant la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}$, placer les points M_0, M_1 et M_2 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2.

Quelles conjectures peut-on faire sur le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) ?

4. (a) Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel n,

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$$

où α est le réel défini dans la question 2.

(b) Peut-on affirmer que la suite (u_n) est convergente ? On justifiera la réponse.

5. Pour tout entier naturel n, on définit la suite (S_n) par

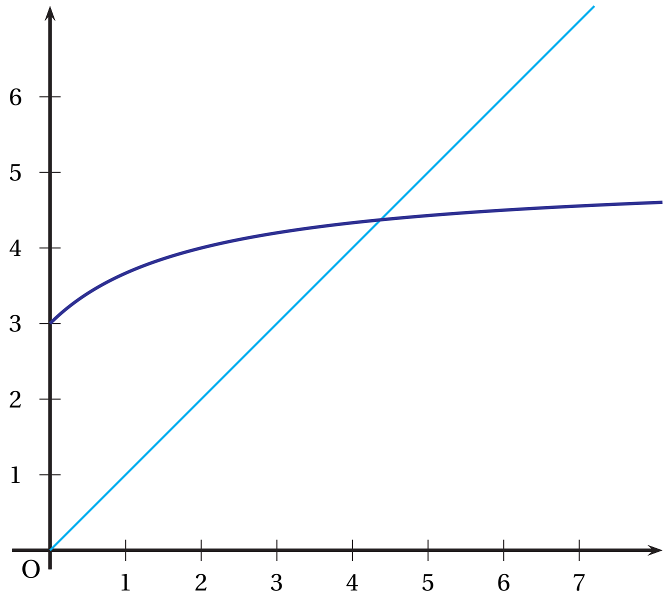
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

(a) Calculer S_0, S_1 et S_2. Donner une valeur approchée des résultats à 10^{-2} près.

(b) Compléter l'algorithme donné en **annexe 2** pour qu'il affiche la somme S_n pour la valeur de l'entier n demandée à l'utilisateur.

(c) Montrer que la suite (S_n) diverge vers $+\infty$.

Annexe 1 à rendre avec la copie



Annexe 2 à rendre avec la copie

Entrée :	n un entier naturel
Variables :	u et s sont des variables réelles
	n et i sont des variables entières
Initialisation :	u prend la valeur 1
	s prend la valeur u
	i prend la valeur 0
	Demander la valeur de n
Traitement :	Tant que …
	Affecter à i la valeur $i+1$
	Affecter à u la valeur …
	Affecter à s la valeur …
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher s.

Correction

Exercice 1 énoncé Nouvelle Calédonie 2014

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 5 - \dfrac{4}{x+2}$.

1. $f'(x) = 0 - \dfrac{0(x+2)-4\times 1}{(x+2)^2} = \dfrac{4}{(x+2)^2} > 0$ sur $[0;+\infty[$.

Donc la fonction f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

2. On résout dans $[0;+\infty[$ l'équation $f(x)=x$:

$$f(x)=x \iff 5-\frac{4}{x+2}=x \iff \frac{5(x+2)-4-x(x+2)}{x+2}=0 \iff \frac{5x+10-4-x^2-2x}{x+2}=0$$

$$\iff \frac{-x^2+3x+6}{x+2}=0 \iff -x^2+3x+6=0 \text{ et } x+2\neq 0$$

On résout $-x^2+3x+6=0$; $\Delta = 9-4\times 6\times(-1)=33>0$.

Les solutions sont donc $\dfrac{-3-\sqrt{33}}{-2} = \dfrac{3+\sqrt{33}}{2}$ et $\dfrac{3-\sqrt{33}}{2}$.

Cette deuxième solution est négative donc l'unique solution de l'équation $f(x)=x$ dans l'intervalle $[0;+\infty[$ est $\alpha = \dfrac{3+\sqrt{33}}{2} \approx 4{,}37$.

3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=f(u_n)$.

Sur la figure de **annexe 1**, on place les points M_0, M_1 et M_2 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2 ; voir page **??**.

On peut conjecturer que la suite (u_n) est croissante et converge vers α.

4. (a) Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété $0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant\alpha$.

- Pour $n=0$, $u_n=u_0=1$ et $u_{n+1}=u_1=f(u_0)=5-\dfrac{4}{1+2}=\dfrac{11}{3}$; de plus $\alpha\approx 4{,}37$.

  On a $0\leqslant 1\leqslant \dfrac{11}{3}\leqslant\alpha$ ce qui veut dire que la propriété est vraie au rang 0.

- On suppose la propriété vraie au rang $p\geqslant 0$, autrement dit : $0\leqslant u_p\leqslant u_{p+1}\leqslant\alpha$.

  On sait d'après la question **1.** que la fonction f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$; donc : $0\leqslant u_p\leqslant u_{p+1}\leqslant\alpha \Longrightarrow f(0)\leqslant f(u_p)\leqslant f(u_{p+1})\leqslant f(\alpha)$

  $f(0)=3\geqslant 0$, $f(u_p)=u_{p+1}$ et $f(u_{p+1})=u_{p+2}$.

  De plus, α est solution de l'équation $f(x)=x$ donc $f(\alpha)=\alpha$.

  On a donc $0\leqslant u_{p+1}\leqslant u_{p+2}\leqslant\alpha$; on peut dire que la propriété est vraie au rang $p+1$.

- La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire ; donc la propriété est vraie pour tout entier naturel n.

On a donc démontré que, pour tout entier naturel n, $0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant\alpha$.

(b) Pour tout n, $u_n\leqslant u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante.

Pour tout n, $u_n\leqslant\alpha$ donc la suite (u_n) est majorée par α.

Donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente.

5. Pour tout entier naturel n, on définit la suite (S_n) par $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0+u_1+\cdots+u_n$.

(a) $S_0=u_0=1$; $S_1=u_0+u_1=1+\dfrac{11}{3}=\dfrac{14}{3}\approx 3{,}7$

$S_2=u_0+u_1+u_2=S_1+u_2$; $u_2=f(u_1)=f\left(\dfrac{11}{3}\right)=\dfrac{73}{17}$ donc $S_2=\dfrac{14}{3}+\dfrac{73}{17}=\dfrac{457}{51}\approx 9{,}0$

(b) On complète l'algorithme donné en annexe 2 pour qu'il affiche la somme S_n pour la valeur de l'entier n demandée à l'utilisateur ; voir page **??**.

(c) On sait que la suite (u_n) est croissante donc, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n\geqslant u_0$.

Or $u_0=1$, donc, pour tout n, $u_n\geqslant 1$ et donc $S_n=u_0+u_1+\ldots+u_n\geqslant n+1$.

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n+1=+\infty$ donc, d'après les théorèmes de comparaison sur les limites :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n=+\infty$$

Annexe 2

Entrée :	n un entier naturel
Variables :	u et s sont des variables réelles
	n et i sont des variables entières
Initialisation :	u prend la valeur 1
	s prend la valeur u
	i prend la valeur 0
	Demander la valeur de n
Traitement :	Tant que $i < n$
	Affecter à i la valeur $i+1$
	Affecter à u la valeur $5 - \dfrac{4}{u+2}$
	Affecter à s la valeur $s+u$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher s

Annexe 1