

### Exercice 3 : suites ( $u_{n+1} = f(u_n)$ )

#### EXERCICE 1 correction Métropole septembre 2012

L'objet de cet exercice est d'étudier la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par

$$u_0 = 3 \quad \text{et pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{7}{u_n} \right) \quad (\star)$$

On pourra utiliser sans démonstration le fait que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n > 0$ .

1. On désigne par  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par

$$f(x) = \frac{1}{2} \left( x + \frac{7}{x} \right).$$

Démontrer que la fonction  $f$  admet un minimum.

En déduire que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \geq \sqrt{7}$ .

2. (a) Soit  $n$  un entier naturel quelconque.

Étudier le signe de  $u_{n+1} - u_n$ .

(b) Pourquoi peut-on en déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente ?

(c) On déduit de la relation  $(\star)$  que la limite  $\ell$  de cette suite est telle que  $\ell = \frac{1}{2} \left( \ell + \frac{7}{\ell} \right)$ .

Déterminer  $\ell$ .

3. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} - \sqrt{7} = \frac{1}{2} \frac{(u_n - \sqrt{7})^2}{u_n}$ .

4. On définit la suite  $(d_n)$  par :

$$d_0 = 1 \quad \text{et pour tout entier naturel } n, \quad d_{n+1} = \frac{1}{2} d_n^2.$$

(a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_n - \sqrt{7} \leq d_n.$$

(b) Voici un algorithme :

Variables :	$n$ et $p$ sont des entiers naturels $d$ est un réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de $p$ .
Initialisations :	Affecter à $d$ la valeur 1. Affecter à $n$ la valeur 0
Traitement :	Tant que $d > 10^{-p}$ .   Affecter à $d$ la valeur $0,5d^2$   Affecter à $n$ la valeur $n + 1$ .
Sortie :	Afficher $n$ .

En entrant la valeur 9, l'algorithme affiche le nombre 5.

Quelle inégalité peut-on en déduire pour  $d_5$  ?

Justifier que  $u_5$  est une valeur approchée de  $\sqrt{7}$  à  $10^{-9}$  près.

## Correction

EXERCICE 1 énoncé Métropole septembre 2012

1.  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et sur cet intervalle :

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{7}{x^2} \right) = \frac{1}{2x^2} (x^2 - 7) \text{ qui est du signe de } x^2 - 7.$$

$$\text{Donc } f'(x) = 0 \iff x^2 - 7 = 0 \iff (x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7}) = 0 \iff x = \sqrt{7} \text{ ou } x = -\sqrt{7}.$$

Il y a donc une solution dans l'intervalle  $]0; +\infty[$  :  $\sqrt{7}$ .

Le trinôme  $x^2 - 7$  est positif sauf entre ses racines donc ici sur  $]0; \sqrt{7}[$ .

Conclusion :  $f$  est décroissante sur  $]0; \sqrt{7}[$  puis croissante sur  $]\sqrt{7}; +\infty[$  ; donc  $f(\sqrt{7})$  est le minimum de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .

$f(\sqrt{7}) = \frac{1}{2} \left( \sqrt{7} + \frac{7}{\sqrt{7}} \right) = \frac{1}{2} (\sqrt{7} + \sqrt{7}) = \sqrt{7}$ . Par définition du minimum, on a donc pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \geq \sqrt{7}$  y compris  $u_0 = 3$ , car  $3^2 > 7$ .

$$2. \text{ (a) } u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{7}{u_n} \right) - u_n = \frac{1}{2} \left( \frac{7}{u_n} - u_n \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{7 - u_n^2}{u_n} \right).$$

Comme  $\frac{1}{2} > 0$ ,  $u_n > 0$  et que  $u_n \geq \sqrt{7} \implies u_n^2 \geq 7 \implies u_n^2 - 7 \geq 0 \implies 7 - u_n^2 \leq 0$ , on en conclut que

$$u_{n+1} - u_n \leq 0$$

Donc la suite  $(u_n)$  est décroissante.

(b) La suite  $(u_n)$  étant décroissante et minorée par  $\sqrt{7}$  est donc convergente vers une limite supérieure ou égale à  $\sqrt{7}$ .

(c)  $\ell = \frac{1}{2} \left( \ell + \frac{7}{\ell} \right) \iff 2\ell = \ell + \frac{7}{\ell} \iff \ell = \frac{7}{\ell} \iff \ell^2 = 7 \iff \ell = \sqrt{7}$  (puisque la limite est positive).

$$3. u_{n+1} - \sqrt{7} = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{7}{u_n} \right) - \sqrt{7} = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{7}{u_n} - 2\sqrt{7} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{u_n^2 + 7 - 2u_n\sqrt{7}}{u_n} \right) = \frac{1}{2} \frac{(u_n - \sqrt{7})^2}{u_n}.$$

(identité remarquable)

4. (a) Initialisation :  $u_0 - \sqrt{7} = 3 - \sqrt{7} \approx 0,35$  et  $d_0 = 1$ .

On a bien  $u_0 - \sqrt{7} \leq d_0$ .

Hérédité :

Remarque préliminaire : on a démontré que  $u_n \geq \sqrt{7}$ , donc  $u_n > 1$  ou encore  $\frac{1}{u_n} < 1$  (2).

Supposons qu'il existe un naturel  $n$  tel que  $u_n - \sqrt{7} \leq d_n$ .

On a démontré à la question 3 que :

$u_{n+1} - \sqrt{7} = \frac{1}{2} \frac{(u_n - \sqrt{7})^2}{u_n}$ . Donc comme  $u_n - \sqrt{7} \leq d_n \implies (u_n - \sqrt{7})^2 \leq d_n^2$ , l'égalité du 3 donne :

$$u_{n+1} - \sqrt{7} < \frac{1}{2} d_n^2 \times \frac{1}{u_n} < \frac{1}{2} d_n^2 \text{ d'après l'inégalité (2) ci-dessus.}$$

$$\text{Finalement } u_{n+1} - \sqrt{7} < \frac{1}{2} d_n^2 \iff u_{n+1} - \sqrt{7} < d_{n+1}.$$

L'hérédité est établie.

Pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_n - \sqrt{7} \leq d_n.$$

(b) L'algorithme indique que pour que  $d_n \leq 10^{-9}$  il faut que  $n \geq 5$ .

On a donc  $d_5 \leq 10^{-9}$ .

Comme  $u_5 - \sqrt{7} < u_5$  c'est-à-dire  $u_5 - \sqrt{7} < 10^{-9}$ , on en déduit que  $u_5$  est une valeur approchée par excès de  $\sqrt{7}$  à  $10^{-9}$  près.