Exercice 6 : lois binomiale, intervalle de confiance, probabilités conditionnelles

EXERCICE 1 correction **Centres Étrangers 2016**

Un institut effectue un sondage pour connaître, dans une population donnée, la proportion de personnes qui sont favorables à un projet d'aménagement du territoire. Pour cela, on interroge un échantillon aléatoire de personnes de cette population, et l'on pose une question à chaque personne.

Les trois parties sont relatives à cette même situation, mais peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A : Nombre de personnes qui acceptent de répondre au sondage

On admet dans cette partie que la probabilité qu'une personne interrogée accepte de répondre à la question est égale à 0,6.

1. L'institut de sondage interroge 700 personnes. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de personnes interrogées qui acceptent de répondre à la question posée.

(a) Quelle est la loi de la variable aléatoire X ? Justifier la réponse.

(b) Quelle est la meilleure approximation de $P(X \geqslant 400)$ parmi les nombres suivants ?

$0,92 \qquad 0,93 \qquad 0,94 \qquad 0,95.$

2. Combien de personnes l'institut doit-il interroger au minimum pour garantir, avec une probabilité supérieur à 0,9, que le nombre de personnes répondant au sondage soit supérieur ou égal à 400.

Partie B : Proportion de personnes favorables au projet dans la population

Dans cette partie, on suppose que n personnes ont répondu à la question, et on admet que ces personnes constituent un échantillon aléatoire de taille n (où n est un entier naturel supérieur à 50).

Parmi ces personnes, 29 % sont favorables au projet d'aménagement.

1. Donner un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, de la proportion de personnes qui sont favorables au projet dans la population totale.

2. Déterminer la valeur minimale de l'entier n pour que l'intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, ait une amplitude inférieure ou égale à 0,04.

Partie C : Correction due à l'insincérité de certaines réponses

Dans cette partie, on suppose que, parmi les personnes sondées qui ont accepté de répondre à la question posée, 29 % affirment qu'elles sont favorables au projet.

L'institut de sondage sait par ailleurs que la question posée pouvant être gênante pour les personnes interrogées, certaines d'entre elles ne sont pas sincères et répondent le contraire de leur opinion véritable. Ainsi, une personne qui se dit favorable peut :

- soit être en réalité favorable au projet si elle est sincère.
- soit être en réalité défavorable au projet si elle n'est pas sincère.

Par expérience, l'institut estime à 15 % le taux de réponses non sincères parmi les personnes ayant répondu, et admet que ce taux est le même quelle que soit l'opinion de la personne interrogée.

Le but de cette partie est, à partir de ces données, de déterminer le taux réel de personnes favorables au projet, à l'aide d'un modèle probabiliste. On prélève au hasard la fiche d'une personne ayant répondu, et on définit :

- F l'évènement « la personne est en réalité favorable au projet » ;
- $\overline{F}$ l'évènement « la personne est en réalité défavorable au projet » ;
- A l'évènement « la personne affirme qu'elle est favorable au projet » ;
- $\overline{A}$ l'évènement « la personne affirme qu'elle est défavorable au projet ».

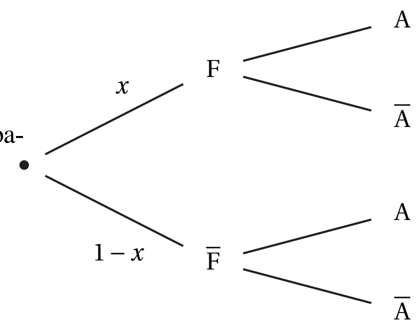
Ainsi, d'après les données, on a $p(A) = 0,29$.

1. En interprétant les données de l'énoncé, indiquer les valeurs de $P_F(A)$ et $P_{\overline{F}}(A)$.

2. On pose $x = P(F)$.

(a) Reproduire sur la copie et compléter l'arbre de probabilité ci-contre.

(b) En déduire une égalité vérifiée par x



3. Déterminer, parmi les personnes ayant répondu au sondage, la proportion de celles qui sont réellement favorables au projet.

Correction

Exercice 1 énoncé **Centres Étrangers 2016**

Partie A

1. (a) L'expérience consistant à interroger une personne est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0,6$ en convenant d'appeler succès le fait que la personne accepte de répondre à la question. On est alors en présence d'une succession de 700 épreuves de Bernoulli, identiques et indépendantes (puisque la probabilité qu'une personne accepte de répondre reste constante). La variable aléatoire X dénombrant les personnes ayant accepté de répondre suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 700$ et $p = 0,6$.

(b) D'après la calculette : $P(X \leqslant 399) \simeq 0,0573$.

Par suite :

$$P(X \geqslant 400) = P(X > 399) = 1 - P(X \leqslant 399) \simeq 0,9427$$

La meilleure valeur approchée est $0,94$

2. Lorsque n personnes sont interrogées, notons X_n la variable aléatoire égale au nombre de personnes acceptant de répondre . X_n suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0.6$.

On cherche le plus petit entier n tel que $P(X_n \geqslant 400) > 0,9$.

Puisque

$$P(X_n \geqslant 400) > 0,9 \iff 1 - P(X_n \leqslant 399) > 0,9 \iff P(X_n \leqslant 399) < 0,1$$

la question est de déterminer, parmi les entiers n vérifiant $P(X_n \leqslant 399) < 0,1$, le plus petit.

La calculette donne $\begin{cases} P(X_{693} \leqslant 399) \simeq 0,1034 \\ P(X_{694} \leqslant 399) \simeq 0,0955 \end{cases}$

Puisque la suite $(P(X_n \leqslant 399))$ est décroissante, alors

694 est le plus petit entier n convenant

Partie B

1. Puisque $n \geqslant 50$, alors $n \times f = 0,29 \times n \geqslant 0,29 \times 50$, soit $n \times f \geqslant 14,5$

De manière analogue, $n \times (1-f) = 0,71 \times n \geqslant 0,71 \times 50$, soit $n \times (1-f) \geqslant 35,5$

Puisque $\begin{cases} n \geqslant 30 \\ n \times f \geqslant 5 \\ n(1-f) \geqslant 5 \end{cases}$, les conditions d'application d'un intervalle de confiance sont vérifiées.

Un intervalle de confiance, au niveau de confiance $95\,\%$, de la proportion de personnes favorables au projet est

$$\left[0,29 - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ 0,29 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

2. L'amplitude de l'intervalle précédent est inférieure ou égale à $0,04$ si et seulement si

$$\frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant 0,04$$

Puisque

$$\frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant 0,04 \iff \frac{2}{0,04} \leqslant \sqrt{n} \overset{n>0}{\iff} n \geqslant \left(\frac{2}{0,04}\right)^2 \iff n \geqslant 2500$$

, alors

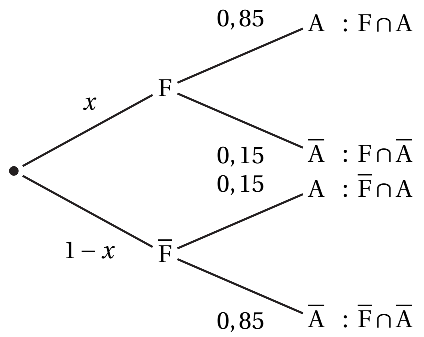
Le nombre minimum de personnes à interroger est 2500

Partie C

1.

$P_F(A) = 0,85$ $\qquad P_{\overline{F}}(A) = 0,15$

2. (a)



(b) D'après l'arbre :

$$P(A) = P(F \cap A) + P\left(\overline{F} \cap A\right) = 0,85x + 0,15(1-x) = 0,7x + 0,15$$

Par suite :

$$0,7x+0,15=0,29$$

3. La résolution de l'équation ci-dessus conduit à $x=0,2$

Parmi les personnes ayant répondu 20 % sont réellement favorables au projet