Exercice 5 : lois binomiale et normale, intervalle de fluctuation

EXERCICE 1 correction **Nouvelle Calédonie mars 2014**

Les parties A, B et C sont indépendantes

Partie A

Restitution organisée des connaissances

L'objectif de cette partie est de démontrer le théorème suivant :

> Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite, alors pour tout réel α appartenant à l'intervalle $]0\,;\ 1[$, il existe un unique réel strictement positif χ_α tel que $P\left(-\chi_\alpha \leqslant X \leqslant \chi_\alpha\right) = 1 - \alpha$.

Soit f la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Soit H la fonction définie et dérivable sur $[0\,;\ +\infty[$ par

$$H(x) = P(-x \leqslant X \leqslant x) = \int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Que représente la fonction f pour la loi normale centrée réduite ?

2. Préciser $H(0)$ et la limite de $H(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

3. À l'aide de considérations graphiques, montrer que pour tout nombre réel positif x, $H(x) = 2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

4. En déduire que la dérivée H' de la fonction H sur $[0\,;\ +\infty[$ est la fonction $2f$ et dresser le tableau de variations de H sur $[0\,;\ +\infty[$.

5. Démontrer alors le théorème énoncé.

Partie B

Un laboratoire se fournit en pipettes auprès de deux entreprises, notées A et B.

60 % des pipettes viennent de l'entreprise A et 4,6 % des pipettes de cette entreprise possèdent un défaut.

Dans le stock total du laboratoire, 5 % des pièces présentent un défaut. On choisit au hasard une pipette dans le stock du laboratoire et on note :

A l'évènement : « La pipette est fournie par l'entreprise A » ;

B l'évènement : « La pipette est fournie par l'entreprise B » ;

D l'évènement : « La pipette a un défaut ».

1. La pipette choisie au hasard présente un défaut ; quelle est la probabilité qu'elle vienne de l'entreprise A ?

2. Montrer que $p(B \cap D) = 0{,}0224$.

3. Parmi les pipettes venant de l'entreprise B, quel pourcentage de pipettes présente un défaut ?

Partie C

Une pipette est dite conforme si sa contenance est comprise, au sens large entre 98 millilitres (mL) et 102 mL.

Soit X la variable aléatoire qui à chaque pipette prise au hasard dans le stock d'un laboratoire associe sa contenance (en millilitres).

On admet que X suit une loi normale de moyenne μ et écart type σ tels que $\mu = 100$ et $\sigma^2 = 1{,}0424$.

1. Quelle est alors la probabilité, à 10^{-4} près, pour qu'une pipette prise au hasard soit conforme ? On pourra s'aider de la table ci-dessous ou utiliser une calculatrice.

Contenance x (en mL)	95	96	97	98	99
$P(X \leqslant x)$ (arrondi à 10^{-5})	0,000 00	0,000 04	0,001 65	0,025 06	0,163 68
Contenance x (en mL)	100	101	102	103	104
$P(X \leqslant x)$ (arrondi à 10^{-5})	0,5	0,836 32	0,974 94	0,998 35	0,999 96

Pour la suite, on admet que la probabilité pour qu'une pipette soit non-conforme est $p = 0,05$.

2. On prélève dans le stock du laboratoire des échantillons de pipettes de taille n, où n est un entier naturel supérieur ou égal à 100. On suppose que le stock est assez important pour considérer ces tirages comme indépendants.

Soit Y_n la variable aléatoire qui à chaque échantillon de taille n associe le nombre de pipettes non-conformes de l'échantillon.

(a) Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire Y_n ?

(b) Vérifier que $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$.

(c) Donner en fonction de n l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de $95\,\%$ de la fréquence des pipettes non-conformes dans un échantillon.

Correction

Exercice 1 (énoncé) — Nouvelle Calédonie mars 2014

Restitution organisée des connaissances

L'objectif de cette partie est de démontrer le théorème suivant :

> Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite, alors pour tout réel α appartenant à l'intervalle $]0\,;\,1[$, il existe un unique réel strictement positif χ_α tel que $P\left(-\chi_\alpha \leqslant X \leqslant \chi_\alpha\right) = 1-\alpha$.

Soit f la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.

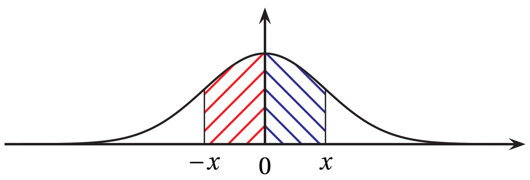
Soit H la fonction définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ par $H(x) = P(-x \leqslant X \leqslant x) = \displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. La fonction f représente la fonction de densité de probabilité pour la loi normale centrée réduite.

2. $H(0) = \displaystyle\int_0^0 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$; et d'après le cours $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} H(x) = 1$.

3. D'après la relation de Chasles : $\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-x}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Mais la fonction f est positive donc $\displaystyle\int_{-x}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'aire du domaine hachuré en rouge sur la figure ci-dessous, tandis que $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'aire du domaine hachuré en bleu.



De plus la fonction f est paire, donc ces deux aires sont égales.

Enfin $H(x)$ est l'aire du domaine situé sous la courbe représentant f hachuré en rouge et en bleu sur la figure.

Donc $H(x) = \displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-x}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

4. On sait que la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ a pour dérivée la fonction f ; donc la fonction H définie par $H(x) = 2\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ a pour dérivée la fonction $2f$.

Or $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} > 0$ sur $\mathbb{R}$; comme $H' = 2f$, $H'(x) > 0$ pour tout réel x, et donc la fonction H est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$. On établit le tableau de variations de H sur $[0\,;+\infty[$:

x	0		$+\infty$
$H'(x)$		$+$	
$H(x)$	0	$\nearrow$	1

5. En prenant α dans l'intervalle $]0\,;1[$, on a aussi $1-\alpha$ dans l'intervalle $]0\,;1[$; on complète le tableau de variations de H :

x	0		χ_α		$+\infty$
$H(x)$	0	$\nearrow$	$1-\alpha$	$\nearrow$	1

D'après le tableau de variations, il existe un réel strictement positif unique noté χ_α tel que $H\left(\chi_\alpha\right) = 1-\alpha$, donc tel que $P\left(-\chi_\alpha \leqslant X \leqslant \chi_\alpha\right) = 1-\alpha$.

Un laboratoire se fournit en pipettes auprès de deux entreprises, notées A et B.
60 % des pipettes viennent de l'entreprise A et 4,6 % des pipettes de cette entreprise possèdent un défaut.
Dans le stock total du laboratoire, 5 % des pièces présentent un défaut. On choisit au hasard une pipette dans le stock du laboratoire et on note :

A l'événement : « La pipette est fournie par l'entreprise A » ;

B l'événement : « La pipette est fournie par l'entreprise B » ;

D l'événement : « La pipette a un défaut ».

1. La pipette choisie au hasard présente un défaut ; la probabilité qu'elle vienne de l'entreprise A est $P_D(A)$.

$$P_D(A) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(A) \times P_A(D)}{P(D)} = \frac{0,6 \times 0,046}{0,05} = 0,552$$

2. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) \iff 0,05 = 0,6 \times 0,046 + P(B \cap D) \iff 0,05 - 0,0276 = P(B \cap D)$$

Donc $P(B \cap D) = 0,0224$.

3. Parmi les pipettes venant de l'entreprise B, la probabilité qu'une pipette présente un défaut est $P_B(D)$. Or $P(B) = 1 - P(A) = 1 - 0,6 = 0,4$.

$$P_B(D) = \frac{P(B \cap D)}{P(B)} = \frac{0,0224}{0,4} = 0,056.$$

Parmi les pipettes venant de l'entreprise B, le pourcentage de pipettes présentant un défaut est donc de $5,6\%$.

1. On cherche la probabilité qu'une pipette prise au hasard soit conforme, soit $P(98 < X < 102)$, en sachant que X suit la loi normale de paramètres $\mu = 100$ et $\sigma^2 = 1,0424$.

À la calculatrice, on trouve $0,9499$ à 10^{-4} près.

En utilisant la table fournie :

$$P(98 < X < 102) = P(X < 102) - P(X \leqslant 98) \approx 0,97494 - 0,02506 \approx 0,94988$$

Pour la suite, on admet que la probabilité pour qu'une pipette soit non-conforme est $p = 0,05$.

2. On prélève dans le stock du laboratoire des échantillons de pipettes de taille n, où n est un entier naturel supérieur ou égal à 100 et on suppose que le stock est assez important pour considérer ces tirages comme indépendants.

Soit Y_n la variable aléatoire qui à chaque échantillon de taille n associe le nombre de pipettes non-conformes de l'échantillon.

(a) Comme on peut supposer que les tirages sont indépendants, la variable aléatoire Y_n suit une loi binomiale de paramètres $n \geqslant 100$ et $p = 0,05$.

(b) On sait que $n \geqslant 100$ donc $n \geqslant 30$.

$n \geqslant 100$ et $p = 0,05$ donc $np \geqslant 100 \times 0,05 \iff np \geqslant 5$

$p = 0,05$ donc $1 - p = 0,95$; $n(1-p) \geqslant 100 \times 0,95 \iff n(1-p) \geqslant 95$ et donc $n(1-p) \geqslant 5$.

Les trois conditions sont vérifiées.

(c) Pour une proportion p et un échantillon de taille n, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % est :

$$\left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

Donc l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la fréquence des pipettes non conformes dans un échantillon est :

$$\left[0,05 - 1,96\frac{\sqrt{0,05(1-0,05)}}{\sqrt{n}} ; 0,05 + 1,96\frac{\sqrt{0,05(1-0,05)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,05 - 1,96\frac{\sqrt{0,0475}}{\sqrt{n}} ; 0,05 + 1,96\frac{\sqrt{0,0475}}{\sqrt{n}}\right]$$