# Exercice 3 : loi exponentielle

## EXERCICE 1 correction **Amerique du Nord 2011**

La durée de vie d'un ordinateur (c'est-à-dire la durée de fonctionnement avant la première panne), est une variable aléatoire $X$ qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$ avec $\lambda > 0$.
Ainsi, pour tout réel $t$ positif, la probabilité qu'un ordinateur ait une durée de vie inférieure à $t$ années, notée $p(X \leqslant t)$, est donnée par : $p(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx$.

**1.** Déterminer $\lambda$ sachant que $p(X > 5) = 0,4$.

**2.** Dans cette question, on prendra $\lambda = 0,18$.

Sachant qu'un ordinateur n'a pas eu de panne au cours des 3 premières années, quelle est, à $10^{-3}$ près, la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à 5 ans ?

**3.** Dans cette question, on admet que la durée de vie d'un ordinateur est indépendante de celle des autres et que $p(X > 5) = 0,4$.

**(a)** On considère un lot de 10 ordinateurs.

Quelle est la probabilité que, dans ce lot, l'un au moins des ordinateurs ait une durée de vie supérieure à 5 ans ? On donnera une valeur arrondie au millième de cette probabilité.

**(b)** Quel nombre minimal d'ordinateurs doit-on choisir pour que la probabilité de l'évènement « l'un au moins d'entre eux a une durée de vie supérieure à 5 ans » soit supérieure à $0,999$ ?

# Correction

## Exercice 1 énoncé **Amerique du Nord 2011**

**1.** On a $p(X>5)=1-p(X\leqslant 5)$. Donc :

$p(X>5)=0,4 \iff 1-p(X\leqslant 5)=0,4 \iff 0,6=p(X\leqslant 5) \iff 0,6=\int_0^5 \lambda e^{-\lambda x}\,dx \iff 0,6=\left[-e^{-\lambda x}\right]_0^5 \iff 0,6=-e^{-5\lambda}+1 \iff e^{-5\lambda}=0,4 \iff$ (par croissance de la fonction logarithme népérien) $-5\lambda=\ln 0,4 \iff \lambda=\dfrac{\ln 0,4}{-5}$.

Or $\dfrac{\ln 0,4}{-5}\approx 0,183$ à $10^{-3}$ près.

**2.** Il faut calculer : $p_{(X>3)}(X>5)=\dfrac{p(X>5)}{p(X>3)}=\dfrac{e^{-5\lambda}}{e^{-3\lambda}}=e^{-2\lambda}=e^{-0,36}\approx 0,698$.

**3. (a)** On fait 10 fois le même tirage de façon indépendante. On a donc une loi binomiale de paramètre 10 et $0,4$. La probabilité cherché est donc le complément à $1$ de la probabilité de n'avoir aucun ordinateur en état de marche soit :

$1-(0,6)^{10}\approx 0,994$ à $10^{-3}$ près.

**(b)** Avec $n$ ordinateurs on a à résoudre l'inéquation :

$1-0,6^n\geqslant 0,999 \iff 0,001\geqslant 0,6^n \iff \ln 0,001\geqslant n\ln 0,6 \iff$
$n\geqslant \dfrac{\ln 0,001}{\ln 0,6}$. Or $\dfrac{\ln 0,001}{\ln 0,6}\approx 13,5$.

Le nombre minimal est donc 14 ordinateurs.