

Exercice 8 : fonctions trigonométriques**EXERCICE 1**

correction

L'objectif de cet exercice est de démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on a :

$$\frac{3 \sin(x)}{2 + \cos(x)} \leq x \leq \frac{2 \sin(x) + \tan(x)}{3},$$

puis d'utiliser cet encadrement pour donner une valeur approchée de π .

1. On considère la fonction f définie sur I par : $f(x) = \frac{3 \sin(x)}{2 + \cos(x)} - x$.

(a) Montrer que pour tout réel x appartenant à I , $f'(x)$ est du signe de $-\cos^2(x) + 2 \cos(x) - 1$.

(b) En déduire le sens de variation de f sur I , puis son signe (on pourra présenter les résultats dans un tableau).

2. On considère la fonction g définie sur I par :

$$g(x) = \frac{2 \sin(x) + \tan(x)}{3} - x.$$

(a) Montrer que pour tout réel x appartenant à I ,

$$g'(x) = \frac{(\cos(x) - 1)^2 (2 \cos(x) + 1)}{3 \cos^2(x)}.$$

(b) En déduire le sens de variation de g sur I , puis son signe.

3. Conclure.

4. En posant $x = \frac{\pi}{6}$ déterminer un encadrement, avec des valeurs exactes, de π .

Correction

EXERCICE 1 énoncé

1. (a) f est dérivable sur $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3 \cos(x)(2 + \cos(x)) + 3 \sin^2(x)}{(2 + \cos(x))^2} \\ &= \frac{6 \cos(x) + 3 \cos^2(x) + 3 \sin^2(x) - (2 + \cos(x))^2}{(2 + \cos(x))^2} \\ &= \frac{6 \cos(x) + 3 - 4 - 4 \cos(x) - \cos^2(x)}{(2 + \cos(x))^2} \\ &= \frac{-\cos^2(x) + 2 \cos(x) - 1}{(2 + \cos(x))^2} \\ &= -\frac{(\cos(x) - 1)^2}{(2 + \cos(x))^2} \end{aligned}$$

Pour tout $x \in I$, on a donc $f'(x) \leq 0$.

(b)

x	0	$\frac{\pi}{2}$
sgn. $f'(x)$	-	
Var. f		
sgn. $f(x)$	-	

2. (a) g est dérivable sur I et pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{3} \left(2 \cos(x) + \frac{1}{\cos^2(x)} \right) - 1 \\ &= \frac{2 \cos^3(x) + 1 - 3 \cos^2(x)}{3 \cos^2(x)} \end{aligned}$$

D'autre part, tout $x \in I$,

$$\begin{aligned} (\cos(x) - 1)^2 (2 \cos(x) + 1) &= (\cos^2(x) - 2 \cos(x) + 1) (2 \cos(x) + 1) \\ &= 2 \cos^3(x) + \cos^2(x) - 4 \cos^2(x) - 2 \cos(x) + 2 \cos(x) + 1 \\ &= 2 \cos^3(x) - 3 \cos^2(x) + 1 \end{aligned}$$

On a donc, tout $x \in I$,

$$g'(x) = \frac{(\cos(x) - 1)^2 (2 \cos(x) + 1)}{3 \cos^2(x)}.$$

(b) Pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(x) \geq 0$ donc $2 \cos(x) + 1 \geq 0$. On en déduit le tableau de variation :

x	0	$\frac{\pi}{2}$
sgn. $g'(x)$	+	
Var. g		
sgn. $g(x)$	+	

3. Soit $x \in I$. On a

$$f(x) \leq 0 \implies \frac{3 \sin(x)}{2 + \cos(x)} \leq x$$

et

$$g(x) \geq 0 \implies x \leq \frac{2 \sin(x) + \tan(x)}{3}.$$

Comme $f(x) \leq 0$ et $g(x) \geq 0$, il vient

$$\frac{3 \sin(x)}{2 + \cos(x)} \leq x \leq \frac{2 \sin(x) + \tan(x)}{3}.$$

4. En prenant $x = \frac{\pi}{6}$, on a $\frac{3}{4 + \sqrt{3}} \leq \frac{\pi}{6} \leq \frac{3 + \sqrt{3}}{9}$ puis $\frac{18}{4 + \sqrt{3}} \leq \pi \leq \frac{6 + 2\sqrt{3}}{3}$.