

Exercice 6 : fonction exponentielle, fonction logarithme, intégration

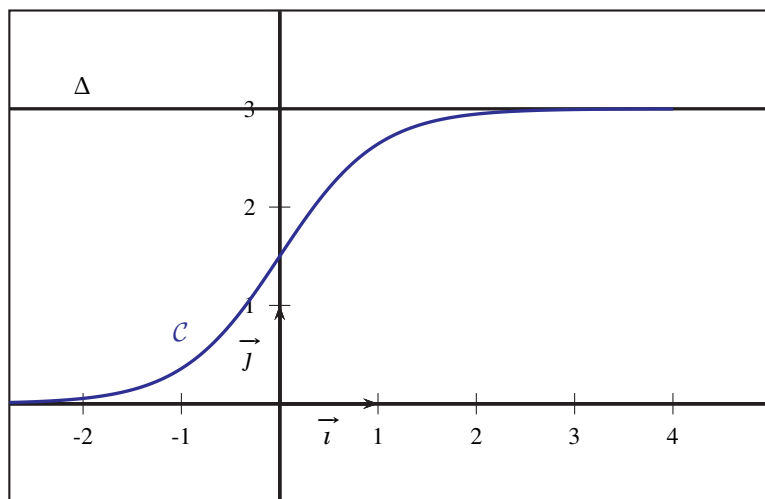
EXERCICE 1 correction Pondichéry 2015

Partie A

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \frac{3}{1 + e^{-2x}}.$$

Sur le graphique ci-après, on a tracé, dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative \mathcal{C} de la fonction f et la droite Δ d'équation $y = 3$.



1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur \mathbb{R} .
2. Justifier que la droite Δ est asymptote à la courbe \mathcal{C} .
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 2,999$ admet une unique solution α sur \mathbb{R} .

Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .

Partie B

Soit h la fonction définie sur \mathbb{R} par $h(x) = 3 - f(x)$.

1. Justifier que la fonction h est positive sur \mathbb{R} .
2. On désigne par H la fonction définie sur \mathbb{R} par $H(x) = -\frac{3}{2} \ln(1 + e^{-2x})$.
Démontrer que H est une primitive de h sur \mathbb{R} .
3. Soit a un réel strictement positif.

(a) Donner une interprétation graphique de l'intégrale $\int_0^a h(x) dx$.

(b) Démontrer que $\int_0^a h(x) dx = \frac{3}{2} \ln\left(\frac{2}{1 + e^{-2a}}\right)$.

(c) On note \mathcal{D} l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan défini par

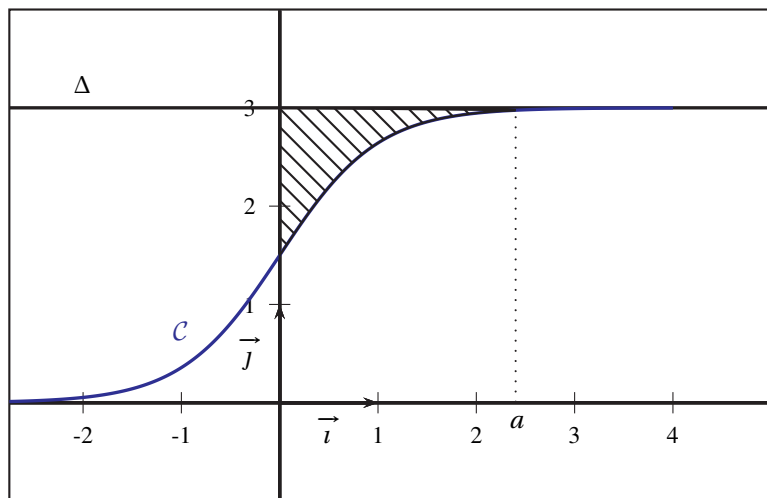
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ f(x) \leq y \leq 3 \end{cases}$$

Déterminer l'aire, en unité d'aire, du domaine \mathcal{D} .

Correction

EXERCICE 1 énoncé **Pondichéry 2015**

Partie A



1. On sait que $e^{-2x} > 0$ quel que soit le réel x , donc $1 + e^{-2x} > 1 > 0$. Le dénominateur étant non nul, la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et sur cet intervalle la fonction étant de la forme $\frac{3}{u(x)}$, avec $u(x) = 1 + e^{-2x}$, donc $u'(x) = -2e^{-2x}$ on a :

$$f'(x) = -\frac{3u'(x)}{(u(x))^2} = -\frac{3 \times (-2)e^{-2x}}{(1 + e^{-2x})^2} = \frac{6e^{-2x}}{(1 + e^{-2x})^2} > 0$$

car quotient de deux nombres supérieurs à zéro. la fonction f est donc strictement croissante sur \mathbb{R} (comme le laisse supposer le graphique).

2. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2x = -\infty$ et en posant $X = -2x$, $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$, d'où

$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + e^{-2x} = 1$ et enfin par quotient de limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$: ceci montre que la droite (Δ) d'équation $y = 3$ est asymptote à C au voisinage de plus l'infini.

3. Sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, la fonction f est continue car dérivable, strictement croissante de $f(0) = \frac{3}{1+1} = 1,5$ à 3 : il existe donc un réel unique $\alpha \in [0 ; +\infty[$ tel que $f(\alpha) = 2,999$.

La calculatrice donne :

$$f(4,00) \approx 2,99899 \text{ et } f(4,01) \approx 2,99901, \text{ donc } 4,00 < \alpha < 4,01 \text{ (encadrement à } 10^{-2} \text{ près).}$$

Partie B

1. On a vu dans la partie A que $0 < f(x) < 3 \iff -f(x) < 0 < 3 - f(x)$, soit $h(x) > 0$ sur \mathbb{R} .

2. La fonction H est dérivable sur \mathbb{R} et sur cet intervalle :

$$H'(x) = -\frac{3}{2} \times \frac{-2e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{3e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{3e^{-2x} + 3 - 3}{1 + e^{-2x}} = \frac{3e^{-2x} + 3}{1 + e^{-2x}} - \frac{3}{1 + e^{-2x}} = \frac{3(e^{-2x} + 1)}{1 + e^{-2x}} - \frac{3}{1 + e^{-2x}} = 3 - f(x) = h(x).$$

Donc H est une primitive de h sur \mathbb{R} .

3. (a) On a vu que sur \mathbb{R} donc en particulier sur l'intervalle $[0 ; a]$ (avec $a > 0$), la fonction h est positive, donc l'intégrale $\int_0^a h(x) dx$ est égale en unités d'aire à la mesure de la surface limitée par la représentation graphique de h , l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$. Mais comme $h(x) = 3 - f(x)$, cette surface est la surface limitée par la droite Δ , la courbe C et les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$ (voir l'aire hachurée ci-dessus).

(b) D'après la question **B. 2.**, on a :

$$\int_0^a h(x) dx = [H(x)]_0^a = H(a) - H(0) = -\frac{3}{2} \ln(1 + e^{-2 \times a}) + \frac{3}{2} \ln(1 + e^{-2 \times 0}) = \frac{3}{2} \ln 2 - \frac{3}{2} \ln(1 + e^{-2 \times a}) = \frac{3}{2} \ln\left(\frac{2}{1 + e^{-2a}}\right).$$

(c) D'après la question précédente, on sait que l'aire de D_a , surface limitée par la droite Δ , la courbe C et les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$ est égale à $\frac{3}{2} \ln\left(\frac{2}{1 + e^{-2a}}\right)$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + e^{-2x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{1 + e^{-2x}}\right) = 2$, donc finalement par composition, l'aire de D est égale à $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{2} \ln\left(\frac{2}{1 + e^{-2x}}\right) = \frac{3}{2} \ln 2 \approx 1,04$ (u. a.)