

**Exercice 5 : fonction exponentielle, fonction logarithme, intégration**

**EXERCICE 1** correction Antilles 2016

**Partie A**

On considère la fonction  $f$  définie pour tout réel  $x$  par  $f(x) = xe^{1-x^2}$ .

1. Calculer la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .

Indication : on pourra utiliser que pour tout réel  $x$  différent de 0,

$$f(x) = \frac{e}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}}.$$

On admettra que la limite de la fonction  $f$  en  $-\infty$  est égale à 0.

2. (a) On admet que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et on note  $f'$  sa dérivée.

Démontrer que pour tout réel  $x$ ,

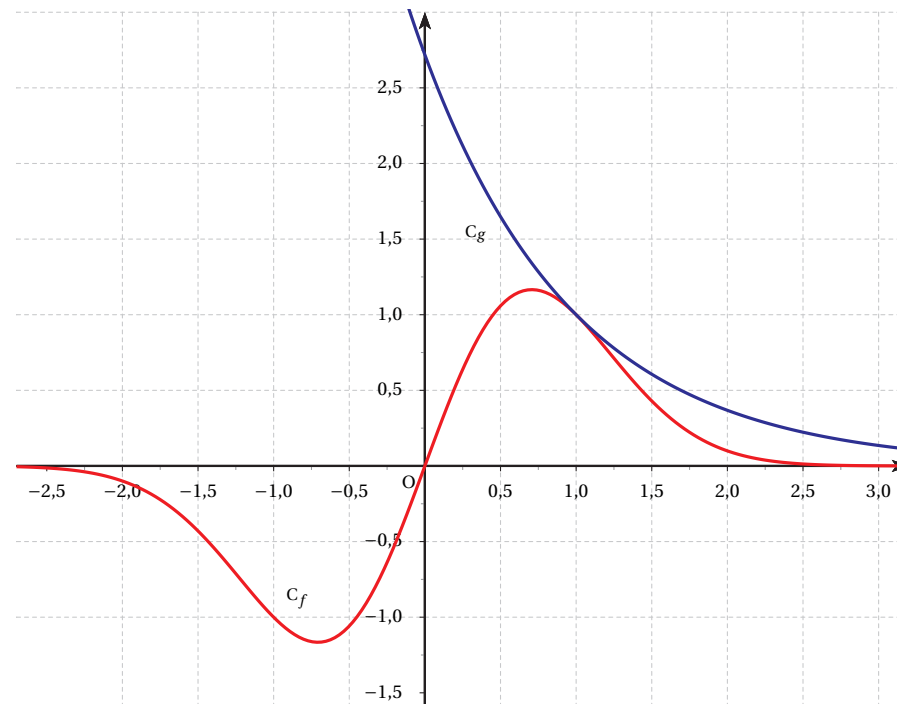
$$f'(x) = (1 - 2x^2)e^{1-x^2}.$$

(b) En déduire le tableau de variations de la fonction  $f$ .

**Partie B**

On considère la fonction  $g$  définie pour tout réel  $x$  par  $g(x) = e^{1-x}$ .

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère les courbes représentatives  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  respectivement des fonctions  $f$  et  $g$ .



Le but de cette partie est d'étudier la position relative de ces deux courbes.

1. Après observation du graphique, quelle conjecture peut-on émettre ?

2. Justifier que, pour tout réel  $x$  appartenant à  $] -\infty ; 0 ]$ ,  $f(x) < g(x)$ .

3. Dans cette question, on se place dans l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .

On pose, pour tout réel  $x$  strictement positif,  $\Phi(x) = \ln x - x^2 + x$ .

(a) Montrer que, pour tout réel  $x$  strictement positif,

$$f(x) \leq g(x) \text{ équivaut à } \Phi(x) \leq 0.$$

On admet pour la suite que  $f(x) = g(x)$  équivaut à  $\Phi(x) = 0$ .

(b) On admet que la fonction  $\Phi$  est dérivable sur  $]0 ; +\infty[$ . Dresser le tableau de variation de la fonction  $\Phi$ . (Les limites en 0 et  $+\infty$  ne sont pas attendues.)

(c) En déduire que, pour tout réel  $x$  strictement positif,  $\Phi(x) \leq 0$ .

4. (a) La conjecture émise à la question 1. de la partie B est-elle valide ?
- (b) Montrer que  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  ont un unique point commun, noté A.
- (c) Montrer qu'en ce point A, ces deux courbes ont la même tangente.

**Partie C**

1. Trouver une primitive F de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. En déduire la valeur de  $\int_0^1 (e^{1-x} - xe^{1-x^2}) dx$ .
3. Interpréter graphiquement ce résultat.

**Correction**

**EXERCICE 1** énoncé **Antilles 2016**

**Partie A**

1. Pour tout réel  $x > 0$ , on a  $f(x) = xe^{1-x^2} = x \times \frac{e}{e^{-x^2}} = \frac{e}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}}$ .

Par opérations :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e}{x} = 0. \tag{1}$$

De plus  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$  et par croissance comparée  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$ .

Par composée des limites on alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{x^2} = +\infty$ , puis par inverse :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = 0, \tag{2}$$

enfin, par produit de (1) et (2) on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

2. (a) On utilise la dérivée d'un produit, ainsi que la dérivée des fonctions de la forme  $e^u$  :

$$f'(x) = 1e^{1-x^2} + x \times (-2x)e^{1-x^2} = e^{1-x^2} - 2x^2e^{1-x^2} = (1 - 2x^2)e^{1-x^2}.$$

(b) Pour tout réel  $x$ ,  $e^{1-x^2} > 0$ , donc  $f'(x)$  a le même signe que  $1 - 2x^2$ . Or :

$$1 - 2x^2 \geq 0 \iff -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

De plus  $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{e} = \sqrt{\frac{e}{2}}$  ; de même  $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{\frac{e}{2}}$ . On en déduit de ce qui précède le tableau de variations suivant :

$x$	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	-
$f(x)$	0	$-\sqrt{\frac{e}{2}}$	$\sqrt{\frac{e}{2}}$	0

**Partie B**

1. Il semble que  $C_f$  soit toujours au dessous de  $C_g$ .

2. Soit  $x$  un réel tel que  $x \leq 0$ , alors  $xe^{1-x^2} \leq 0$ , c'est-à-dire  $f(x) \leq 0$ , alors que  $g(x) = e^{1-x} > 0$  par conséquent il est clair que  $f(x) < g(x)$ .

3. (a) Soit  $x$  un réel tel que  $x > 0$ , alors, par application de la fonction  $\ln$  qui est strictement croissante :

$$\begin{aligned} f(x) \leq g(x) &\iff xe^{1-x^2} \leq e^{1-x} \\ &\iff \ln x + 1 - x^2 \leq 1 - x \\ &\iff \ln x - x^2 + x \leq 0 \\ &\iff \Phi(x) \leq 0. \end{aligned}$$

(b) On a  $\Phi'(x) = \frac{1}{x} - 2x + 1 = \frac{-2x^2 + x + 1}{x}$ . Comme  $x > 0$ ,  $\Phi'(x)$  a le même signe que  $-2x^2 + x + 1$ . Ce polynôme du second degré a pour discriminant  $\Delta = 9$  et pour racines  $-\frac{1}{2}$  et 1. Ainsi :

$$-2x^2 + x + 1 > 0 \iff -\frac{1}{2} < x < 1.$$

On a  $\Phi(1) = \ln 1 - 1^2 + 1 = 0$ . Sur  $]0; +\infty[$  le tableau de variation (sans limite) de  $\Phi$  est donc :

$x$	0	1	$+\infty$
$\Phi'(x)$	+	0	-
$\Phi(x)$	<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"><math>\nearrow</math></div> <div style="text-align: center;">0</div> <div style="text-align: center;"><math>\searrow</math></div> </div>		

(c) Le tableau de variation précédent montre que la fonction  $\Phi$  possède en 1 un maximum qui vaut 0, autrement dit, pour tout réel  $x > 0$ , on a  $\Phi(x) \leq 0$ .

4. (a) D'après B 1 et B 3 c, on a, pour tout réel  $x$ ,  $f(x) \geq g(x)$ . La courbe  $\mathcal{C}_f$  est donc toujours en dessous de  $\mathcal{C}_g$ .

(b) Sur  $] -\infty ; 0]$ , on a  $f(x) < g(x)$  les courbes n'y ont donc aucun point commun. Sur  $]0 ; +\infty[$ , on a  $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = 1$ . Ces deux courbes ont donc un unique point commun A dont l'abscisse est 1.

(c) On a  $f(1) = g(1) = 1$ . De plus  $f'(1) = (1 - 2 \times 1^2)e^{1-1^2} = -1$ , et  $g'(x) = -e^{1-x}$  donc  $g'(1) = -e^{1-1} = -1$ , donc  $f'(1) = g'(1)$ . Au point d'abscisse 1, les tangentes respectives à  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  passe par un même point, et ont même coefficient directeur, elles sont donc confondues.

**Partie C**

1. On pose  $u(x) = 1 - x^2$  ; alors  $u'(x) = -2x$  donc  $x = -\frac{1}{2}u'(x)$  d'où  $f = -\frac{1}{2}u'(x)e^{u(x)}$ .

Une primitive est  $F(x) = -\frac{1}{2}e^{u(x)} = \boxed{-\frac{1}{2}e^{1-x^2}}$ .

2.  $\int_0^1 (e^{1-x} - xe^{1-x^2}) dx = \int_0^1 [g(x) - f(x)] dx$ .

Une primitive de  $g - f$  est  $G - F$  avec

$(G - F)(x) = -e^{1-x} - \left(-\frac{1}{2}e^{1-x^2}\right) = \frac{1}{2}e^{1-x^2} - e^{1-x}$ .

$\int_0^1 (e^{1-x} - xe^{1-x^2}) dx = (G - F)(1) - (G - F)(0) = \left(\frac{1}{2} - 1\right) - \left(\frac{1}{2}e - e\right) = \boxed{\frac{e-1}{2}}$ .

3. Ce résultat correspond à l'aire en unités d'aire du domaine compris entre  $\mathcal{C}_g$ ,  $\mathcal{C}_f$  et les droites d'équation  $x = 0$  et  $x = 1$ .