

Exercice 4 : fonction logarithme, intégration

EXERCICE 1

correction

Amérique du Nord 2015

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$u(x) = \ln(x) + x - 3.$$

1. Justifier que la fonction u est strictement croissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
2. Démontrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α comprise entre 2 et 3.
3. En déduire le signe de $u(x)$ en fonction de x .

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right) [\ln(x) - 2] + 2.$$

On appelle \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0.
2. (a) Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{u(x)}{x^2}$ où u est la fonction définie dans la partie A.
- (b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Partie C

Soit \mathcal{C}' la courbe d'équation $y = \ln(x)$.

1. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$, $f(x) - \ln(x) = \frac{2 - \ln(x)}{x}$.

En déduire que les courbes \mathcal{C} et \mathcal{C}' ont un seul point commun dont on déterminera les coordonnées.

2. On admet que la fonction H définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par

$$H(x) = \frac{1}{2} [\ln(x)]^2$$

est une primitive de la fonction h définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $h(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.

Calculer $I = \int_1^{e^2} \frac{2 - \ln x}{x} dx$.

Interpréter graphiquement ce résultat.

Correction

EXERCICE 1 énoncé **Amerique du Nord 2015**

1. La fonction est la somme des fonctions $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto x - 3$, toutes deux strictement croissantes sur $]0; +\infty[$, elle est donc strictement croissante sur cet intervalle.

Remarque. On pouvait également dériver la fonction u et constater que la dérivée est strictement positive sur l'intervalle considéré.

2. Remarquons que la fonction \ln conserve les inégalités strictes puisqu'elle est strictement croissante.

Calculons $u(2) = \ln(2) - 1$ or $\ln(2) < \ln(e) = 1$ car $e > 2$. On prouve ainsi que $u(2) < 0$.

D'autre part, $u(3) = \ln(3)$ or $\ln(3) > \ln(1) = 0$ car $3 > 1$, ce qui montre que $u(3) > 0$.

Notons également que u est continue comme somme de fonctions continues.

Nous sommes donc dans les conditions d'application du théorème des valeurs intermédiaires.

0 possède ainsi un antécédent par u dans l'intervalle $[2; 3]$. Comme u est strictement monotone sur $]0; +\infty[$, cet antécédent α est unique sur $]0; +\infty[$.

Remarque. Ici, on pouvait également expliquer que l'on constate à la calculatrice que $u(2) < 0$ et $u(3) > 0$. Mais cet argument est nettement moins satisfaisant d'un point de vue du raisonnement.

3. Compte-tenu du sens de variation de u , on a :

x	0	α	$+\infty$
$u(x)$	-	0	+

1. Nous savons que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$. Par opérations sur les limites, on en déduit

que :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$$

2. (a) f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme sommes et produits de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$.

Pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x^2}(\ln(x) - 2) + \left(1 - \frac{1}{x}\right) \frac{1}{x} \text{ En réduisant au dénominateur } x^2 : \\ &= \frac{1}{x^2}(\ln(x) - 2 + x - 1) \\ &= \frac{1}{x^2}(\ln(x) + x - 3) \\ &= \frac{1}{x^2}u(x) \end{aligned}$$

(b) Pour tout $x > 0$, $x^2 > 0$. Ainsi le signe de f' est celui de u . On en déduit que f est strictement décroissante sur $]0; \alpha]$ et strictement croissante sur $]\alpha; +\infty[$.

1. Un point $M(x; y)$ appartient aux deux courbes à la fois lorsque :

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = \ln(x) \end{cases} \iff \begin{cases} y = \ln(x) \\ f(x) = \ln(x) \end{cases} \iff \begin{cases} y = \ln(x) \\ 0 = f(x) - \ln(x) \end{cases}$$

On calcule :

$$\begin{aligned} f(x) - \ln(x) &= \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 2) + 2 - \ln(x). \text{ On réduit au dénominateur } x : \\ &= \frac{1}{x}[(x-1)(\ln(x) - 2) + 2x - x\ln(x)] \\ &= \frac{1}{x}[x\ln(x) - 2x - \ln(x) + 2 + 2x - x\ln(x)] \\ &= \frac{1}{x}(2 - \ln(x)) \end{aligned}$$

Or $2 - \ln(x) = 0$ n'a qu'une solution qui est $x = e^2$.

Les deux courbes se coupent donc en un unique point d'abscisse $x = e^2$ et d'ordonnée $y = \ln(e^2) = 2$.

2. On utilise la linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} I &= \int_1^{e^2} \frac{2 - \ln(x)}{x} dx \\ &= 2 \int_1^{e^2} \frac{1}{x} dx - \int_1^{e^2} \frac{\ln(x)}{x} dx \end{aligned}$$

Or \ln est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ et H est une primitive de $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} I &= 2 [\ln(x)]_1^{e^2} - [H(x)]_1^{e^2} \\ &= 2 (\ln(e^2) - \ln(1)) - \frac{1}{2} (\ln(e^2)^2 - \ln(1)^2) \\ &= 2 \end{aligned}$$

L'aire délimitée par C , C' , et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = e^2$ est donc égale à 2.