Exercice 2 : fonction exponentielle, théorème des V.I. et intégration

EXERCICE 1 correction **Antilles 2014**

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = x + 1 + \frac{x}{e^x}.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.

Partie A

1. Soit g la fonction définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 1 - x + e^x.$$

Dresser, en le justifiant, le tableau donnant les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$ (les limites de g aux bornes de son ensemble de définition ne sont pas attendues).

En déduire le signe de $g(x)$.

2. Déterminer la limite de f en $-\infty$ puis la limite de f en $+\infty$.

3. On appelle f' la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Démontrer que, pour tout réel x,

$$f'(x) = e^{-x}g(x).$$

4. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

5. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle α sur $\mathbb{R}$.

Démontrer que $-1 < \alpha < 0$.

6. **(a)** Démontrer que la droite T d'équation $y = 2x + 1$ est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

(b) Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite T.

Partie B

1. Soit H la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par

$$H(x) = (-x - 1)e^{-x}.$$

Démontrer que H est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction h définie par $h(x) = xe^{-x}$.

2. On note $\mathcal{D}$ le domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}$, la droite T et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$.

Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine $\mathcal{D}$.

Correction

Exercice 1 énoncé **Antilles 2014**

Partie A

1. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme combinaison simple de fonctions qui le sont, et pour tout réel x : $g'(x) = -1 + \mathrm{e}^x$. On a alors $g'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x \geqslant 1 \Leftrightarrow x \geqslant 0$. Le tableau de variations de g est donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	2	$\nearrow$	

On déduit du tableau précédent que, pour tout réel x, $g(x) \geqslant 2 > 0$.

2. Étude en $-\infty$.
$\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = -\infty$ donc, par somme : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
Étude en $+\infty$.
$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1) = +\infty$ et, par croissances comparées $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$, donc, par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

3. Pour tout réel x, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \frac{1\times \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2} \\ &= 1 + \frac{\mathrm{e}^x(1-x)}{\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^x} \\ &= 1 + \frac{1-x}{\mathrm{e}^x} \\ &= \frac{\mathrm{e}^x + 1 - x}{\mathrm{e}^x} \\ &= \mathrm{e}^{-x} g(x). \end{aligned}$$

4. On a vu plus haut que, pour tout réel x, $g(x) > 0$, et comme par ailleurs $\mathrm{e}^{-x} > 0$, on en déduit que $f'(x) > 0$. On obtient alors le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

5. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, strictement croissante. D'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'intervalle $\mathbb{R}$ a pour image $\mathbb{R}$, ce dernier intervalle contenant 0, on en déduit que l'équation $f(x) = 0$ possède dans $\mathbb{R}$ une solution α unique.

Par ailleurs, $f(-1) = -\mathrm{e}^{-1} < 0$ et $f(0) = 1 > 0$, donc : $-1 < \alpha < 0$.

6. (a) La tangente T a pour équation réduite :

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) \Leftrightarrow y = 2x+1.$$

(b) Posons, pour tout réel x, $k(x) = f(x) - (2x+1)$, alors :

$$\begin{aligned} k(x) &= x + 1 + \frac{x}{\mathrm{e}^x} - (2x+1) \\ &= \frac{x}{\mathrm{e}^x} - x \\ &= \frac{x}{\mathrm{e}^x}\left(1 - \mathrm{e}^x\right). \end{aligned}$$

Dressons alors un tableau de signes :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
$1-\mathrm{e}^x$		$+$	0	$-$	
$k(x)$		$-$	0	$-$	

On en déduit que $\mathcal{C}$ est située en dessous de T.

Partie B

1. Pour tout réel x :

$$\mathrm{H}'(x) = -\mathrm{e}^{-x} + (-x-1)\left(-\mathrm{e}^{-x}\right) = \mathrm{e}^{-x}(x+1-1) = x\mathrm{e}^{-x} = h(x),$$

la fonction H est donc une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

2. Sur $[1\ ;\ 3]$, $\mathcal{C}$ est en dessous de T, l'aire $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{D}$ est donc :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_3^4 \big((2x+1)-f(x)\big)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_1^3 x-h(x)\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^2}{2}-\mathrm{H}(x)\right]_1^3 \\
&= 4+4\mathrm{e}^{-3}-2\mathrm{e}^{-1}.
\end{aligned}$$