Exercice 1 : fonction exponentielle, théorème des V.I.

Exercice 1 correction **Nouvelle Calédonie 2013**

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x + \frac{1}{x}.$$

1. Étude d'une fonction auxiliaire

(a) Soit la fonction g dérivable, définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = x^2\mathrm{e}^x - 1.$$

Étudier le sens de variation de la fonction g.

(b) Démontrer qu'il existe un unique réel a appartenant à $[0\,;\,+\infty[$ tel que $g(a) = 0$.

Démontrer que a appartient à l'intervalle $[0{,}703\,;\,0{,}704[$.

(c) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0\,;\,+\infty[$.

2. Étude de la fonction f

(a) Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

(b) On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Démontrer que pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

(c) En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

(d) Démontrer que la fonction f admet pour minimum le nombre réel

$m = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a}$.

(e) Justifier que $3{,}43 < m < 3{,}45$.

Correction

Exercice 1 énoncé **Nouvelle Calédonie 2013**

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^x + \dfrac{1}{x}$.

1. Étude d'une fonction auxiliaire

(a) Soit la fonction g dérivable, définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = x^2\mathrm{e}^x - 1$.

Pour tout réel x de $[0\,;\,+\infty[$: $g'(x) = 2x\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x \geqslant 0$ sur $]0\,;\,+\infty[$ (car tous les termes sont positifs.

La fonction g est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$ (car la dérivée ne s'annule qu'en 0).

(b) $g(0) = -1 < 0$ et $g(1) = \mathrm{e} - 1 > 0$. Dressons le tableau de variations de g :

x	0		a		1		$+\infty$
$g(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	e - 1	$\nearrow$	

D'après ce tableau de variations, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[0;1]$; on appelle a cette solution.

$g(0,703) \approx -0,0018 < 0$ et $g(0,704) \approx 0,002 > 0$ donc $a \in [0,703;0,704]$.

(c) D'après le tableau de variations de g :
- $g(x) < 0$ sur $[0;a[$
- $g(x) > 0$ sur $]a;+\infty[$

2. Étude de la fonction f

(a)

$$\left.\begin{array}{r}\lim x0\mathrm{e}^x = 1\\ \lim x\underset{x>0}{0}\,\dfrac{1}{x} = +\infty\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim x\underset{x>0}{0}\,\mathrm{e}^x + \dfrac{1}{x} = +\infty \Longrightarrow \lim x\underset{x>0}{0}\,f(x) = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{r}\lim x{+}\infty\mathrm{e}^x = +\infty\\ \lim x{+}\infty\dfrac{1}{x} = 0\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim x{+}\infty\mathrm{e}^x + \dfrac{1}{x} = +\infty \Longrightarrow \lim x{+}\infty f(x) = +\infty$$

(b) On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

$f(x) = \mathrm{e}^x + \dfrac{1}{x} \Longrightarrow f'(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2\mathrm{e}^x - 1}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$

(c) Pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, $x^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$.

On dresse le tableau de variation de f :

x	0		a		$+\infty$
$g(x)$	-1	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	$+\infty$

(d) D'après son tableau de variation, la fonction f admet le nombre $f(a)$ comme minimum sur son intervalle de définition.

$f(a) = \mathrm{e}^a + \dfrac{1}{a}$. Or a est la solution de l'équation $g(x) = 0$ donc

$g(a) = 0 \iff a^2\mathrm{e}^a - 1 = 0 \iff a^2\mathrm{e}^a = 1 \iff \mathrm{e}^a = \dfrac{1}{a^2}$.

On en déduit que $f(a) = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a}$ et on a donc démontré que la fonction f admettait pour minimum sur $]0\,;\,+\infty[$ le nombre réel $m = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a}$.

(e) On a successivement(en valeurs approchées) :

$$0,703 < a < 0,704$$
$$0,4942 < a^2 < 0,4957$$
$$\frac{1}{0,4957} < \frac{1}{a^2} < \frac{1}{0,4942}$$
$$2,017 < \frac{1}{a^2} < 2,024$$

$$0,703 < a < 0,704$$
$$\frac{1}{0,704} < \frac{1}{a} < \frac{1}{0,703}$$
$$1,420 < \frac{1}{a} < 1,423$$

donc par somme : $2,017 + 1,420 < \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a} < 2,024 + 1,423$ et donc :

$3,43 < m < 3,45$