

Exercice 4 : plan variable, volume d'un tétraèdre**EXERCICE 1** correction **Métropole 2015**

Dans un repère orthonormé (O, I, J, K) d'unité 1 cm, on considère les points $A(0; -1; 5)$, $B(2; -1; 5)$, $C(11; 0; 1)$, $D(11; 4; 4)$.

Un point M se déplace sur la droite (AB) dans le sens de A vers B à la vitesse de 1 cm par seconde.

Un point N se déplace sur la droite (CD) dans le sens de C vers D à la vitesse de 1 cm par seconde.

À l'instant $t = 0$ le point M est en A et le point N est en C .

On note M_t et N_t les positions des points M et N au bout de t secondes, t désignant un nombre réel positif.

On admet que M_t et N_t , ont pour coordonnées :

$M_t(t; -1; 5)$ et $N_t(11; 0,8t; 1 + 0,6t)$.

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. (a) La droite (AB) est parallèle à l'un des axes (OI) , (OJ) ou (OK) . Lequel ?
- (b) La droite (CD) se trouve dans un plan \mathcal{P} parallèle à l'un des plans (OIJ) , (OIK) ou (OJK) . Lequel ? On donnera une équation de ce plan \mathcal{P} .
- (c) Vérifier que la droite (AB) , orthogonale au plan \mathcal{P} , coupe ce plan au point $E(11; -1; 5)$.
- (d) Les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes ?
2. (a) Montrer que $M_t N_t^2 = 2t^2 - 25,2t + 138$.
- (b) À quel instant t la longueur $M_t N_t$ est-elle minimale ?

Correction

EXERCICE 1 énoncé **Métropole 2015**

Dans un repère orthonormé (O, I, J, K) d'unité 1 cm, on considère les points A (0 ; -1 ; 5), B (2 ; -1 ; 5), C (11 ; 0 ; 1), D (11 ; 4 ; 4).

1. (a) Un vecteur directeur de la droite (AB) est $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\overrightarrow{OI}$.

La droite (AB) est donc parallèle à l'axe (OI).

(b) On a $x_C = x_D = 11$ donc la droite (CD) est incluse dans le plan \mathcal{P} d'équation $x = 11$.

(c) (AB) est parallèle à (OI) et (OI) est orthogonale au plan \mathcal{P} donc (AB) est orthogonale à \mathcal{P} .

Le point d'intersection E a des coordonnées (x ; y ; z) qui vérifient l'équation cartésienne de \mathcal{P} et la représentation paramétrique de \mathcal{P} .

On doit avoir : $\begin{cases} x = 11 \\ x = t \\ y = -1 \\ z = 5 \end{cases}$ donc $E(11 ; -1 ; 5)$.

(d) Une représentation paramétrique de (AB) est $\begin{cases} x = t \\ y = -1 \\ z = 5 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ et une représentation para-

métrique de (CD) est $\begin{cases} x = 11 \\ y = 0,8t' \\ z = 1 + 0,6t' \end{cases}$, $t' \in \mathbb{R}$. On résout le système $\begin{cases} t = 11 \\ -1 = 0,8t' \\ 5z = 1 + 0,6t' \end{cases}$

qui n'a pas de solutions, car on trouve t' négatif, donc $1 + 0,6t' < 5$.

Les droites (AB) et (CD) ne sont pas sécantes.

2. (a) $\overrightarrow{M_t N_t} \begin{pmatrix} 11 - t \\ 0,8t + 1 \\ 0,6t - 4 \end{pmatrix}$ donc $M_t N_t^2 = (11 - t)^2 + (0,8t + 1)^2 + (0,6t - 4)^2$

$= 121 - 22t + t^2 + 0,64t^2 + 1,6t + 1 + 0,36t^2 - 4,8t + 16 =$

$M_t N_t^2 = 2t^2 - 25,2t + 138$.

(b) $M_t N_t$ est positif, donc est minimale quand son carré est minimal.

On considère la fonction $f : t \rightarrow 2t^2 - 25,2t + 138$; f est une fonction du second degré ; le coefficient de t^2 est 2. Le minimum est atteint pour $t = \frac{25,2}{4} = 6,3$.

La distance est **minimale** pour $t = 6,3$ s