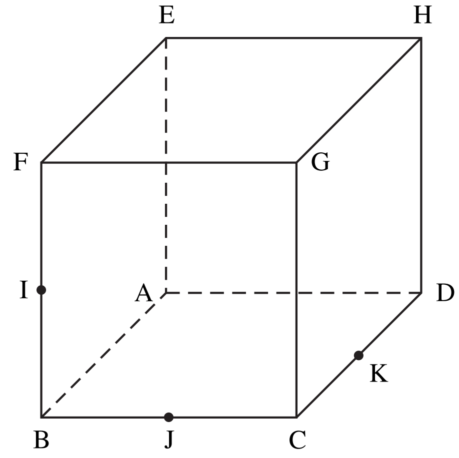
Exercice 1 : section, distance dépendant d'un paramètre

EXERCICE 1 correction **Pondichéry 2016**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

ABCDEFGH désigne un cube de côté 1.
Le point I est le milieu du segment [BF].
Le point J est le milieu du segment [BC].
Le point K est le milieu du segment [CD].



Partie A

Dans cette partie, on ne demande aucune justification

On admet que les droites (IJ) et (CG) sont sécantes en un point L.
Construire, sur la figure fournie en annexe et en laissant apparents les traits de construction :

- le point L ;
- l'intersection $\mathcal{D}$ des plans (IJK) et (CDH) ;
- la section du cube par le plan (IJK).

Partie B

L'espace est rapporté au repère $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Donner les coordonnées de A, G, I, J et K dans ce repère.

2. **(a)** Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (IJK).

(b) En déduire une équation cartésienne du plan (IJK).

3. On désigne par M un point du segment [AG] et t le réel de l'intervalle [0 ; 1] tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AG}$.

(a) Démontrer que $MI^2 = 3t^2 - 3t + \dfrac{5}{4}$.

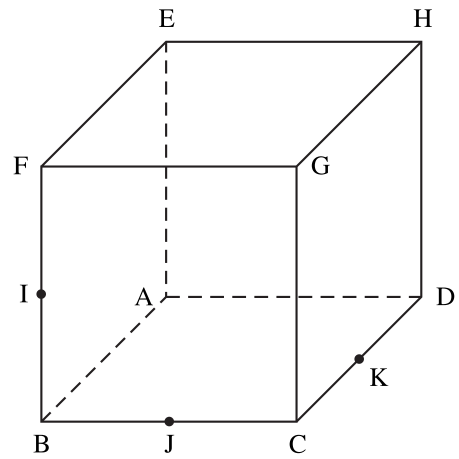
(b) Démontrer que la distance MI est minimale pour le point $M\left(\dfrac{1}{2} ; \dfrac{1}{2} ; \dfrac{1}{2}\right)$.

4. Démontrer que pour ce point $M\left(\dfrac{1}{2} ; \dfrac{1}{2} ; \dfrac{1}{2}\right)$:

(a) M appartient au plan (IJK).

(b) La droite (IM) est perpendiculaire aux droites (AG) et (BF).

Annexe



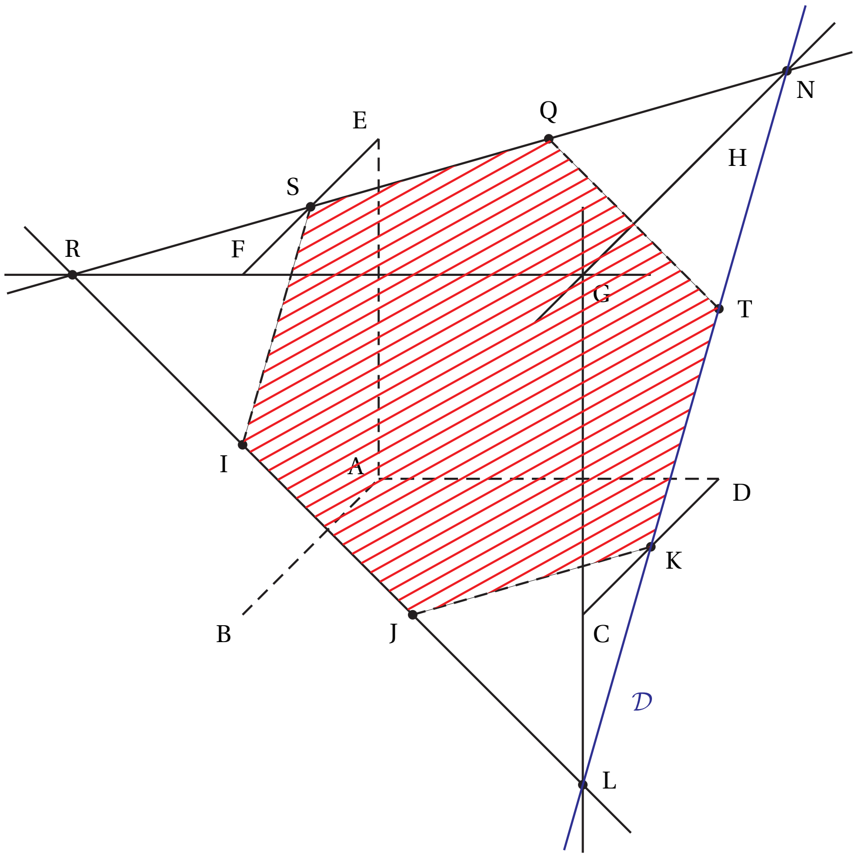
Correction

Exercice 1 énoncé **Pondichéry 2016**

Partie A

On admet que les droites (IJ) et (CG) sont sécantes en un point L.

On construit :
- le point L ;
- l'intersection $\mathcal{D}$ des plans (IJK) et (CDH) ;
- la section du cube par le plan (IJK).



Partie B

L'espace est rapporté au repère $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Dans le repère $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$, les coordonnées des sommets du cube sont :
$A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $D(0;1;0)$, $E(0;0;1)$, $C(1;1;0)$, $F(1;0;1)$, $H(0;1;1)$, $G(1;1;1)$.

Le point I est le milieu de [BF] donc I a pour coordonnées $\left(1;0;\frac{1}{2}\right)$.

Le point J est le milieu de [BC] donc J a pour coordonnées $\left(1;\frac{1}{2};0\right)$.

Le point K est le milieu de [CD] donc K a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2};1;0\right)$.

2. (a) Le vecteur $\overrightarrow{AG}$ a les mêmes coordonnées que le point G c'est-à-dire $(1;1;1)$.

- $\overrightarrow{IJ}$ a pour coordonnées $\left(1-1;\frac{1}{2}-0;0-\frac{1}{2}\right)=\left(0;\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

  $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{IJ}=1\times 0+1\times\frac{1}{2}+1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=0$ donc $\overrightarrow{AG}\perp\overrightarrow{IJ}$

- $\overrightarrow{JK}$ a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}-1;1-\frac{1}{2};0-0\right)=\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$.

  $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{JK}=1\times\left(-\frac{1}{2}\right)+1\times\frac{1}{2}+1\times 0=0$ donc $\overrightarrow{AG}\perp\overrightarrow{JK}$

Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{JK}$ ne sont pas colinéaires ; le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IJK) donc il est normal au plan (IJK).

(b) Le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (IJK) ; le plan (IJK) est l'ensemble des points $P(x;y;z)$ de l'espace tels que $\overrightarrow{IP}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AG}$:

Le vecteur $\overrightarrow{IP}$ a pour coordonnées $\left(x-1;y-0;z-\frac{1}{2}\right)=\left(x-1;y;z-\frac{1}{2}\right)$.

$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{IP}=0 \iff 1\times(x-1)+1\times y+1\times\left(z-\frac{1}{2}\right)=0 \iff x+y+z-\frac{3}{2}=0$

Le plan (IJK) a pour équation $x+y+z-\frac{3}{2}=0$.

3. On désigne par M un point du segment [AG] et t le réel de l'intervalle [0 ; 1] tel que $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AG}$; donc le point M a pour coordonnées $(t;t;t)$.

(a) $IM^2=(t-1)^2+(t-0)^2+\left(t-\frac{1}{2}\right)^2=t^2-2t+1+t^2+t^2-t+\frac{1}{4}=3t^2-3t+\frac{5}{4}$

(b) Le trinôme ax^2+bx+c avec $a>0$ est minimal pour $x=-\dfrac{b}{2a}$, donc $3t^2-3t+\dfrac{5}{4}$ est minimal pour $t=-\dfrac{-3}{2\times 3}$ donc pour $t=\dfrac{1}{2}$.

MI^2 donc MI est minimal pour $t=\dfrac{1}{2}$; cela correspond au point M_m de coordonnées $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

4. (a) Le plan (IJK) a pour équation $x+y+z-\dfrac{3}{2}=0$ et le point M_m a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

$x_{\mathrm{M}_m}+y_{\mathrm{M}_m}+z_{\mathrm{M}_m}-\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}=0$ donc $\mathrm{M}_m\in(\mathrm{IJK})$

(b) Les points I et M_m appartiennent au plan (IJK) et le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ est normal au plan (IJK) ; on en déduit que les droites (IJ) et (AG) sont orthogonales.

Mais le point M_m est le milieu de [AG] donc il appartient à (AG).

On peut donc en déduire que les droites (IM_m) et (AG) sont perpendiculaires en M_m.

Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{IM}_m}$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}-1;\dfrac{1}{2}-0;\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\right)=\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};0\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{BF}}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ donc le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{BF}}$ a pour coordonnées $(0;0;1)$.

$\overrightarrow{\mathrm{BF}}.\overrightarrow{\mathrm{IM}_m}=0\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)+0\times\dfrac{1}{2}+1\times 0=0$ donc $\overrightarrow{\mathrm{BF}}\perp\overrightarrow{\mathrm{IM}_m}$ donc la droite (IM_m) est orthogonale à la droite (BF).

Mais le point I appartient aux deux droites (IM_m) et (BF) donc on peut dire que les droites (IL) et (BF) sont perpendiculaires en I.