

Exercice 7 : $f(z) = z^2 + 2z + 9$, ensemble de points**EXERCICE 1** correction **Nouvelle Calédonie 2012**

Dans cet exercice les deux parties peuvent être traitées indépendamment.

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on appelle A le point d'affixe 1 et \mathcal{C} le cercle de centre A et de rayon 1.

La figure sera réalisée sur une feuille de papier millimétré avec 4 cm pour unité graphique.

Partie A

On considère l'équation

$$(E): z^2 - 2z + 2 = 0,$$

où z est un nombre complexe. On appelle z_1 et z_2 les solutions de (E).

1. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes \mathbb{C} .
2. On appelle M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z_1 et z_2 dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Montrer que M_1 et M_2 appartiennent au cercle \mathcal{C} .

Partie B

On considère l'application f du plan complexe qui à tout point M d'affixe z distinct de A associe le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{2z-1}{2z-2}.$$

1. Placer le point A et tracer le cercle \mathcal{C} sur une figure que l'on complètera au fur et à mesure.
2. Montrer que pour tout complexe z distinct de 1 on a

$$(z' - 1)(z - 1) = \frac{1}{2}.$$

3. Montrer que pour tout point M distinct de A on a :

- $AM \times AM' = \frac{1}{2}$;
- $M' \neq A$;
- $(\vec{u}; \overrightarrow{AM}) + (\vec{u}; \overrightarrow{AM'}) = 0 + 2k\pi$, où k est un entier relatif

4. On considère le point P d'affixe $z_P = 1 + e^{i\frac{\pi}{4}}$. Construire le point P.
5. En utilisant la question 3, expliquer comment construire le point P' , image de P par f , et réaliser cette construction.
6. Soit un point M appartenant à la droite D d'équation $x = \frac{3}{4}$. Soit M' son image par f .
 - (a) Montrer que le point M' appartient au cercle \mathcal{C}' de centre O de rayon 1.
 - (b) Tout point de \mathcal{C}' a-t-il un antécédent par f ?

Correction

EXERCICE 1 énoncé Nouvelle Calédonie 2012

Partie A

1.

$$\begin{aligned} z^2 - 2z + 2 = 0 &\iff (z-1)^2 - 1 + 2 = 0 \\ &\iff (z-1)^2 + 1 = 0 \\ &\iff (z-1)^2 - i^2 = 0 \\ &\iff (z-1+i)(z-1-i) = 0 \\ &\iff z-1+i=0 \text{ ou } z-1-i=0 \\ &\iff z=1-i \text{ ou } z=1+i \end{aligned}$$

2. Soit M_1 d'affixe $z_1 = 1 - i$. On a $AM_1 = |z_1 - z_A| = |1 - i - 1| = |-i| = 1$.

De même $AM_2 = |z_2 - z_A| = |1 + i - 1| = |i| = 1$. Ces deux résultats signifient que M_1 et M_2 appartiennent au cercle de centre A et de rayon 1 soit au cercle \mathcal{C} .

Partie B

1. Voir à la fin de l'exercice.

2. Soit $z \neq 1$. $(z' - 1)(z - 1) = \left(\frac{2z-1}{2z-2} - 1\right)(z-1) = \frac{2z-1-2z+2}{2z-2}(z-1) = \frac{z-1}{2(z-1)} = \frac{1}{2}$.

3. Le résultat précédent entraîne :

- en termes de modules : $AM \times AM' = \frac{1}{2}$;
- le produit des deux complexes étant non nul aucun des deux facteurs ne peut l'être, et en particulier $z' - 1 \neq 0 \iff z' \neq 1$, soit $M' \neq A$;
- en termes d'argument : $\arg[(z' - 1)(z - 1)] = 0 \pmod{2\pi}$. Or

$$\arg[(z' - 1)(z - 1)] = \left(\vec{u} ; \overrightarrow{AM}\right) + \left(\vec{u} ; \overrightarrow{AM'}\right) \pmod{2\pi},$$

donc

$$\left(\vec{u} ; \overrightarrow{AM}\right) + \left(\vec{u} ; \overrightarrow{AM'}\right) = 0 + 2k\pi, \text{ où } k \text{ est un entier relatif.}$$

4. On a

$$z_P = 1 + e^{i\frac{\pi}{4}} \iff z_P - 1 = e^{i\frac{\pi}{4}} \implies |z_P - 1| = \left|e^{i\frac{\pi}{4}}\right| \iff |z_P - 1| = 1.$$

Cette dernière égalité montre que P appartient au cercle de centre A et de rayon 1, donc au cercle \mathcal{C} .

Il ne reste plus qu'à construire sur ce cercle le point tel que $\left(\vec{u}, \overrightarrow{AP}\right) = \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$.

5. On a $AP \times AP' = \frac{1}{2}$; or $AP = 1$, donc $AP' = \frac{1}{2}$. le point P' appartient au cercle \mathcal{C}_1 de centre A et de rayon $\frac{1}{2}$.

D'autre part on a $\left(\vec{u}, \overrightarrow{AP'}\right) = -\frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$.

On peut donc construire P_1 symétrique sur le cercle \mathcal{C} du point P autour de l'axe horizontal contenant A. Le point P' est le point commun à $[AP_1]$ et au cercle \mathcal{C}_1 . Voir plus bas.

6. (a) On a donc $z = \frac{3}{4} + \alpha i$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. D'où :

$$\begin{aligned} z' &= \frac{2\left(\frac{3}{4} + \alpha i\right) - 1}{2\left(\frac{3}{4} + \alpha i\right) - 2} = \frac{\frac{3}{2} + 2\alpha i - 1}{\frac{3}{2} + 2\alpha i - 2} = \frac{\frac{1}{2} + 2\alpha i}{-\frac{1}{2} + 2\alpha i} = \frac{\left(\frac{1}{2} + 2\alpha i\right)\left(-\frac{1}{2} - 2\alpha i\right)}{\left(-\frac{1}{2} + 2\alpha i\right)\left(-\frac{1}{2} - 2\alpha i\right)} = \frac{-\frac{1}{4} - \alpha i - \alpha i + 4\alpha^2}{\frac{1}{4} + 4\alpha^2} \\ &= \frac{-\frac{1}{4} - 2\alpha i + 4\alpha^2}{\frac{1}{4} + 4\alpha^2}. \end{aligned}$$

D'où

$$|z'|^2 = \frac{\left(-\frac{1}{4} + 4\alpha^2\right)^2}{\left(\frac{1}{4} + 4\alpha^2\right)^2} + \frac{4\alpha^2}{\left(\frac{1}{4} + 4\alpha^2\right)^2} = \frac{\frac{1}{16} + 16\alpha^4 - 2\alpha^2 + 4\alpha^2}{\left(\frac{1}{4} + 4\alpha^2\right)^2} = \frac{\frac{1}{16} + 16\alpha^4 + 2\alpha^2}{\left(\frac{1}{4} + 4\alpha^2\right)^2} = \frac{\left(\frac{1}{4} + 4\alpha^2\right)^2}{\left(\frac{1}{4} + 4\alpha^2\right)^2} = 1.$$

D'où $|z'| = 1$: le point M' appartient au cercle \mathcal{C}' de centre O de rayon 1.

(b) Un point M' de \mathcal{C}' a une affixe qui peut s'écrire $z' = e^{ia}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Son ou ses antécédents par f vérifient :

$$e^{ia} = \frac{2z-1}{2z-2} \iff 2ze^{ia} - 2e^{ia} = 2z-1 \iff 2z(e^{ia}-1) = 2e^{ia}-1 \iff z = \frac{2e^{ia}-1}{e^{ia}-1} \text{ si } e^{ia}-1 \neq 0.$$

Or

$$e^{ia} - 1 = 0 \iff e^{ia} = 1 \iff a = 0 \iff z = 1.$$

C'est le point A et on sait que ce point n'a pas d'image par f . La réponse est : non.