

Exercice 6 : $f(z) = z^2 + 2z + 9$, ensemble de point

EXERCICE 1 correction Antilles septembre 2014

On note \mathbb{C} l'ensemble des nombres complexes.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On prendra comme unité 2 cm sur chaque axe.

Le graphique sera fait sur une feuille de papier millimétré et complété au fur et à mesure des questions.

On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z associe

$$f(z) = z^2 + 2z + 9.$$

1. Calculer l'image de $-1 + i\sqrt{3}$ par la fonction f .

2. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $f(z) = 5$.

Écrire sous forme exponentielle les solutions de cette équation.

Construire alors sur le graphique, à la règle et au compas, les points A et B dont l'affixe est solution de l'équation (A étant le point dont l'affixe a une partie imaginaire positive).

On laissera les traits de construction apparents.

3. Soit λ un nombre réel. On considère l'équation $f(z) = \lambda$ d'inconnue z .

Déterminer l'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles l'équation $f(z) = \lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées.

4. Soit (F) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie

$$|f(z) - 8| = 3.$$

Prouver que (F) est le cercle de centre $\Omega(-1; 0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.

Tracer (F) sur le graphique.

5. Soit z un nombre complexe, tel que $z = x + iy$ où x et y sont des nombres réels.

(a) Montrer que la forme algébrique de $f(z)$ est

$$x^2 - y^2 + 2x + 9 + i(2xy + 2y).$$

(b) On note (E) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $f(z)$ soit un nombre réel.

Montrer que (E) est la réunion de deux droites D_1 et D_2 dont on précisera les équations.

Compléter le graphique en traçant ces droites.

6. Déterminer les coordonnées des points d'intersection des ensembles (E) et (F).

Correction

EXERCICE 1 énoncé **Antilles septembre 2014**

On note \mathbb{C} l'ensemble des nombres complexes.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z associe $f(z) = z^2 + 2z + 9$.

1. $f(-1 + i\sqrt{3}) = (-1 + i\sqrt{3})^2 + 2(-1 + i\sqrt{3}) + 9 = 1 - 2i\sqrt{3} - 3 - 2 + 2i\sqrt{3} + 9 = 5$

2. On résout dans \mathbb{C} l'équation $f(z) = 5$:

$$f(z) = 5 \iff z^2 + 2z + 9 = 5 \iff z^2 + 2z + 4 = 0 ; \Delta = 4 - 16 = -12 = -(2\sqrt{3})^2$$

Donc l'équation admet deux racines complexes conjuguées : $\frac{-2 + 2i\sqrt{3}}{2} = -1 + i\sqrt{3}$ et $-1 - i\sqrt{3}$

On appelle A le point d'affixe $z_A = -1 + i\sqrt{3}$ et B le point d'affixe $z_B = -1 - i\sqrt{3}$

$$|z_A| = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\text{Soit } \theta_A \text{ un argument de } z_A : \left. \begin{array}{l} \cos \theta_A = -\frac{1}{2} \\ \sin \theta_A = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right\} \implies \theta_A = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

Donc $z_A = 2e^{\frac{2i\pi}{3}}$

Les nombres complexes z_A et z_B sont conjugués, donc ils ont le même module et des arguments opposés donc $z_B = 2e^{-\frac{2i\pi}{3}}$

$|z_A| = 2$ donc le point A se trouve sur le cercle de centre O et de rayon 2. De plus la partie réelle de A vaut -1 donc A se trouve sur la droite d'équation $x = -1$. Idem pour B.

Voir graphique page ??.

3. Soit λ un nombre réel. On considère l'équation $f(z) = \lambda$ d'inconnue z .

$$f(z) = \lambda \iff z^2 + 2z + 9 = \lambda \iff z^2 + 2z + 9 - \lambda = 0$$

Pour que l'équation $f(z) = \lambda$ admette deux solutions complexes conjuguées, il faut et il suffit que le discriminant du polynôme $z^2 + 2z + 9 - \lambda$ soit strictement négatif.

$$\Delta = 4 - 4(9 - \lambda) = 4 - 36 + 4\lambda = 4\lambda - 32 ; \Delta < 0 \iff 4\lambda - 32 < 0 \iff \lambda < 8$$

L'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles l'équation $f(z) = \lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées est l'intervalle $] -\infty; 8[$.

4. Soit (F) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie $|f(z) - 8| = 3$

$f(z) - 8 = z^2 + 2z + 9 - 8 = z^2 + 2z + 1 = (z + 1)^2$; donc $|f(z) - 8| = |(z + 1)^2| = |z + 1|^2$ car le module d'un carré est égal au carré du module.

$$\text{Donc } |f(z) - 8| = 3 \iff |z + 1|^2 = 3 \iff |z + 1| = \sqrt{3}$$

Soit Ω le point d'affixe -1 , donc de coordonnées $(-1; 0)$; si on appelle M le point d'affixe z , alors $|z + 1| = \sqrt{3} \iff |z_M - z_\Omega| = \sqrt{3}$.

L'ensemble des points M vérifiant $|z_M - z_\Omega| = \sqrt{3}$ est le cercle de centre Ω et de rayon $\sqrt{3}$.

On trace (F) sur le graphique (voir page ??).

5. Soit z un nombre complexe, tel que $z = x + iy$ où x et y sont des nombres réels.

(a) $f(z) = z^2 + 2z + 9 = (x + iy)^2 + 2(x + iy) + 9 = x^2 + 2ixy - y^2 + 2x + 2iy + 9 = x^2 - y^2 + 2x + 9 + i(2xy + 2y)$

(b) On note (E) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $f(z)$ soit un nombre réel.

$$f(z) \text{ réel} \iff 2xy + 2y = 0 \iff 2y(x + 1) = 0 \iff y = 0 \text{ ou } x = -1$$

Donc (E) est la réunion de deux droites D_1 d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) et D_2 d'équation $x = -1$.

Le cercle (F) est de centre Ω d'affixe -1 et de rayon $\sqrt{3}$. Donc les points d'intersection du cercle (F) avec l'axe des abscisses ont pour coordonnées $(-1 - \sqrt{3}; 0)$ et $(-1 + \sqrt{3}; 0)$.

Les points A et B ont pour affixes z_A et z_B dont les parties réelles sont égales à -1 ; donc A et B sont situés sur la droite D_2 .

$$\Omega A = |z_A - z_\Omega| = |-1 + i\sqrt{3} + 1| = |i\sqrt{3}| = \sqrt{3} \text{ donc le point A appartient au cercle (F).}$$

$$\Omega B = |z_B - z_\Omega| = |-1 - i\sqrt{3} + 1| = |-i\sqrt{3}| = \sqrt{3} \text{ donc le point B appartient au cercle (F).}$$

Les coordonnées des quatre points d'intersection des ensembles (E) et (F) sont :

$$(-1 - \sqrt{3}; 0), (-1 + \sqrt{3}; 0), (-1; \sqrt{3}) \text{ et } (-1; -\sqrt{3})$$