Exercices 4 : $z_{n+1} = f(z_n)$, récurrence

Exercice 1 correction **Liban 2016**

Commun à tous les candidats

On considère la suite (z_n) de nombres complexes définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} z_0 & = & 0 \\ z_{n+1} & = & \frac{1}{2}\mathrm{i} \times z_n + 5 \end{cases}$$

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on note M_n le point d'affixe z_n.
On considère le nombre complexe $z_\mathrm{A} = 4 + 2\mathrm{i}$ et A le point du plan d'affixe z_A.

1. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = z_n - z_\mathrm{A}$.

(a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\mathrm{i} \times u_n$.

(b) Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = \left(\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^n (-4 - 2\mathrm{i}).$$

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, les points A, M_n et M_{n+4} sont alignés.

Correction

Exercice 1 énoncé Liban 2016

Commun à tous les candidats

On considère la suite (z_n) de nombres complexes définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} z_0 & = & 0 \\ z_{n+1} & = & \frac{1}{2}\text{i}\times z_n+5 \end{cases}$

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on note M_n le point d'affixe z_n.

On considère le nombre complexe $z_\text{A}=4+2\text{i}$ et A le point du plan d'affixe z_A.

1. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n=z_n-z_\text{A}$.

(a) Montrons que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\frac{1}{2}\text{i}\times u_n$.

Pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=z_{n+1}-z_\text{A}=\frac{1}{2}\text{i}\times z_n+5-(4+2\text{i})=\frac{1}{2}\text{i}\times z_n+1-2\text{i}$.

Pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2}\text{i}\times u_n=\frac{1}{2}\text{i}(z_n-z_\text{A})=\frac{1}{2}\text{i}(z_n-4-2\text{i})=\frac{1}{2}\text{i}\times z_n+1-2\text{i}$.

Et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\frac{1}{2}\text{i}\times u_n$.

(b) On va démontrer par récurrence que, pour tout n, la propriété $\mathcal{P}_n$: $\left(\frac{1}{2}\text{i}\right)^n(-4-2\text{i})$ est vraie.

- *Initialisation* : $u_0=z_0-z_\text{A}=-z_\text{A}=-4-2\text{i}$; pour $n=0$, $\left(\frac{1}{2}\text{i}\right)^n(-4-2\text{i})=\left(\frac{1}{2}\text{i}\right)^0(-4-2\text{i})=-4-2\text{i}$

  Donc la propriété est vraie pour $n=0$.

- *Hérédité* : on suppose la propriété vraie au rang quelconque $p\leqslant 0$, c'est-à-dire $\left(\frac{1}{2}\text{i}\right)^p(-4-2\text{i})$; on va la démontrer au rang $p+1$.

  $u_{p+1}=\frac{1}{2}\text{i}u_n=\frac{1}{2}\text{i}\times\left(\frac{1}{2}\text{i}\right)^p(-4-2\text{i})=\left(\frac{1}{2}\text{i}\right)^{p+1}(-4-2\text{i})$

  Donc la propriété est vraie au rang $p+1$.

- La propriété est vraie au rang 0, elle est héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n.

Pour tout entier naturel n, $u_n=\left(\frac{1}{2}\text{i}\right)^n(-4-2\text{i})$

2. Démontrons que, pour tout entier naturel n, les points A, M_n et M_{n+4} sont alignés.

Le vecteur $\overrightarrow{\text{AM}_n}$ a pour affixe $u_n=z_n-z_\text{A}$, et le vecteur $\overrightarrow{\text{AM}_{n+4}}$ a pour affixe $u_{n+4}=z_{n+4}-z_\text{A}$.

Mais d'après la question précédente, pour tout entier naturel n, $u_{n+4}=\left(\frac{1}{2}\text{i}\right)^{n+4}(-4-2\text{i})$ et $u_n=\left(\frac{1}{2}\text{i}\right)^n(-4-2\text{i})$.

On en déduit que pour tout entier naturel n, $u_{n+4}=\left(\frac{1}{2}\text{i}\right)^4u_n$.

Mais $\left(\frac{1}{2}\text{i}\right)^4=\frac{1}{16}$

On en déduit que pour tout entier naturel n, $u_{n+4}=\frac{1}{16}u_n$ et $\overrightarrow{\text{AM}_{n+4}}=\frac{1}{16}\overrightarrow{\text{AM}_n}$

Ce qui prouve que, pour tout entier naturel n, les vecteurs sont colinéaires et par conséquent les points A, M_n et M_{n+4} sont alignés.