

Exercices 3 : $z_{n+1} = f(z_n)$, algorithmique

EXERCICE 1 correction **Pondichéry 2014**

Candidats n'ayant pas suivi la spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Pour tout entier naturel n , on note A_n le point d'affixe z_n défini par :

$$z_0 = 1 \quad \text{et} \quad z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right) z_n.$$

On définit la suite (r_n) par $r_n = |z_n|$ pour tout entier naturel n .

1. Donner la forme exponentielle du nombre complexe $\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$.

2. (a) Montrer que la suite (r_n) est géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(b) En déduire l'expression de r_n en fonction de n .

(c) Que dire de la longueur OA_n lorsque n tend vers $+\infty$?

3. On considère l'algorithme suivant :

Variables	n entier naturel R réel P réel strictement positif
Entrée	Demander la valeur de P
Traitement	R prend la valeur 1 n prend la valeur 0 Tant que $R > P$ n prend la valeur $n + 1$ R prend la valeur $\frac{\sqrt{3}}{2}R$ Fin tant que
Sortie	Afficher n

(a) Quelle est la valeur affichée par l'algorithme pour $P = 0,5$?

(b) Pour $P = 0,01$ on obtient $n = 33$. Quel est le rôle de cet algorithme ?

4. (a) Démontrer que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1} .

(b) On admet que $z_n = r_n e^{i \frac{n\pi}{6}}$.

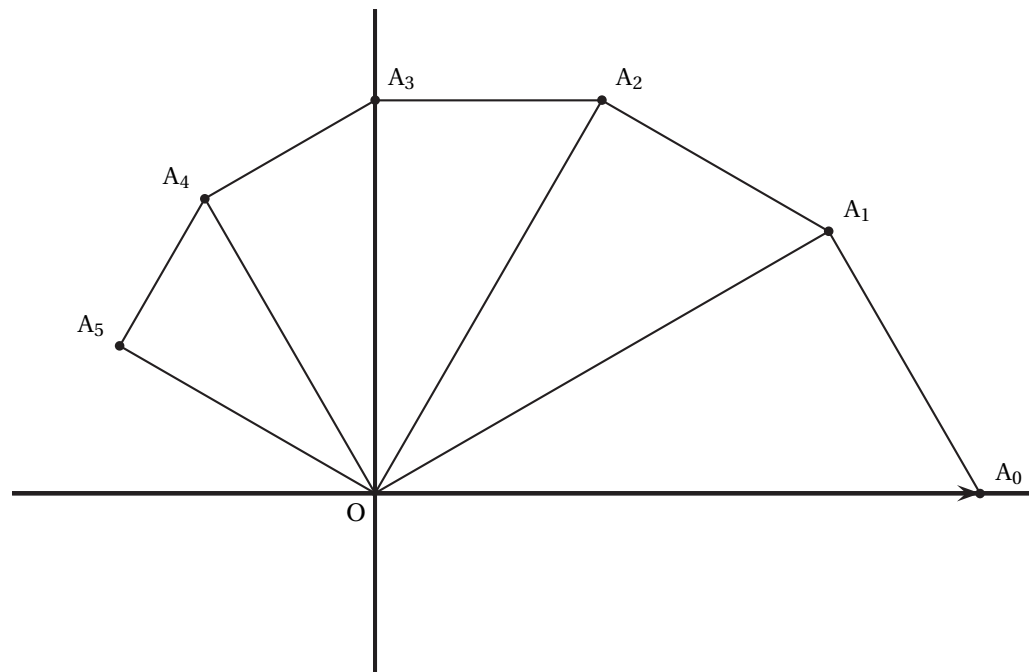
Déterminer les valeurs de n pour lesquelles A_n est un point de l'axe des ordonnées.

(c) Compléter la figure donnée en annexe, à rendre avec la copie, en représentant les points A_6, A_7, A_8 et A_9 .

Les traits de construction seront apparents.

ANNEXE

À compléter et à rendre avec la copie



Correction

EXERCICE 1 énoncé **Pondichéry 2014**

Candidats n'ayant pas suivi la spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Pour tout entier naturel n , on note A_n le point d'affixe z_n défini par : $z_0 = 1$ et $z_{n+1} =$

$$\left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right) z_n$$

On définit la suite (r_n) par $r_n = |z_n|$ pour tout entier naturel n .

1.
$$\left|\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right| = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{3}{16}} = \sqrt{\frac{12}{16}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}i}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{3}{4} \times \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{2}{\sqrt{3}}i\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

Or $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Donc le nombre complexe $\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$ a pour module $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et pour argument $\frac{\pi}{6}$ donc sa forme exponentielle est $\frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\frac{\pi}{6}}$.

2. (a)
$$r_{n+1} = |z_{n+1}| = \left|\left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right) z_n\right| = \left|\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right| \times |z_n| = \frac{\sqrt{3}}{2} r_n$$

Donc la suite (r_n) est géométrique de raison $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et de premier terme $r_0 = |z_0| = 1$.

(b) La suite (r_n) est géométrique donc, pour tout n , $r_n = r_0 \times q^n$, donc $r_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$.

(c)
$$OA_n = |z_n| = r_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

(r_n) est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$; or $-1 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$ donc la suite (r_n) converge vers

0. La longueur OA_n tend donc vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

3. (a) On fait tourner l'algorithme donné dans le texte en prenant pour P la valeur 0,5 :

	n	R	P	$R > P$
Initialisations	0	1	0,5	Vrai
Traitement	1	0,866	0,5	Vrai
	2	0,75	0,5	Vrai
	3	0,6495	0,5	Vrai
	4	0,5625	0,5	Vrai
	5	0,487	0,5	Faux
Sortie	Afficher 5			

La valeur affichée par l'algorithme pour $P = 0,5$ est 5.

(b) Cet algorithme s'arrête dès que $R \leq P$ et affiche alors n , c'est-à-dire qu'il affiche la plus petite valeur de n pour laquelle R donc $r_n = OA_n$ est inférieur ou égal à P .

On peut donc dire que $OA_{32} > 0,01$ et que $OA_{33} \leq 0,01$.

Vérification à la calculatrice : $r_{32} \approx 0,01002$ et $r_{33} \approx 0,00868$.

4. (a) On considère le triangle OA_nA_{n+1} .

$OA_n = r_n$ donc $(OA_n)^2 = r_n^2$

$OA_{n+1} = r_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2} r_n$ donc $(OA_{n+1})^2 = \frac{3}{4} r_n^2$

$$A_nA_{n+1} = |z_{n+1} - z_n| = \left|\left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right) z_n - z_n\right| = \left|\left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i - 1\right) z_n\right| = \left|-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right| \times |z_n|$$

$$= \sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} \times r_n = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{3}{16}} r_n = \sqrt{\frac{4}{16}} r_n = \frac{1}{2} r_n \text{ donc } (A_nA_{n+1})^2 = \frac{1}{4} r_n^2$$

$(A_nA_{n+1})^2 + (OA_{n+1})^2 = \frac{1}{4} r_n^2 + \frac{3}{4} r_n^2 = r_n^2 = (OA_n)^2$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1} .

(b) On admet que $z_n = r_n e^{i \frac{n\pi}{6}}$.

Le point A_n , d'affixe z_n , appartient à l'axe des ordonnées si et seulement si son argument est $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$ modulo 2π , c'est-à-dire $\frac{\pi}{2}$ modulo π , donc il peut s'écrire $\frac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Le nombre z_n a pour argument $\frac{n\pi}{6}$; $\frac{n\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi \iff n = 3 + 6k$.

Mais n est un entier naturel donc k doit être strictement positif donc appartenir à \mathbb{N} .

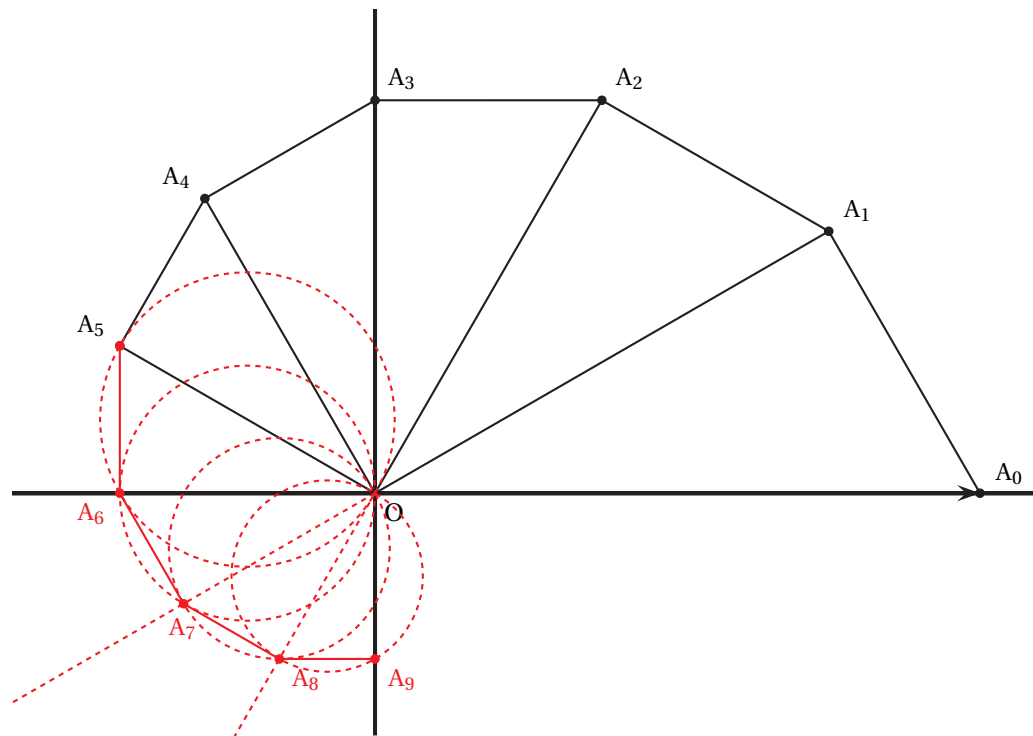
Donc si n s'écrit $3 + 6k$ avec $k \in \mathbb{N}$, alors le point A_n appartient à l'axe des ordonnées.

(c) Le point A_6 a pour affixe z_6 qui a pour argument $\frac{6\pi}{6} = \pi$; ce point est donc sur l'axe des abscisses. Comme le triangle OA_5A_6 est rectangle en A_6 , on trace le cercle de diamètre $[OA_5]$; le point A_6 est à l'intersection de ce cercle et de l'axe des abscisses.

Le point A_7 a pour affixe z_7 qui a pour argument $\frac{7\pi}{6}$; donc les points A_1 , O et A_7 sont alignés. Le point A_7 se trouve donc à l'intersection du cercle de diamètre $[OA_6]$ et de la droite (OA_1) .

Etc. (Voir figure en annexe)

Remarque : les points A_3 et A_9 appartiennent à l'axe des ordonnées, ce qui correspond bien à la réponse trouvée à la question **4.b**.



ANNEXE NON SPÉCIALITÉ