

Exercices 2 : équation du second degré dans \mathbb{C}

EXERCICE 1 correction Métropole 2015

1. Résoudre dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes l'équation (E) d'inconnue z :

$$z^2 - 8z + 64 = 0.$$

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 4 + 4i\sqrt{3}$,
 $b = 4 - 4i\sqrt{3}$ et $c = 8i$.

- (a) Calculer le module et un argument du nombre a .
- (b) Donner la forme exponentielle des nombres a et b .
- (c) Montrer que les points A, B et C sont sur un même cercle de centre O dont on déterminera le rayon.
- (d) Placer les points A, B et C dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Pour la suite de l'exercice, on pourra s'aider de la figure de la question 2. d. complétée au fur et à mesure de l'avancement des questions.

3. On considère les points A', B' et C' d'affixes respectives $a' = ae^{i\frac{\pi}{3}}$, $b' = be^{i\frac{\pi}{3}}$ et $c' = ce^{i\frac{\pi}{3}}$.

- (a) Montrer que $b' = 8$.
- (b) Calculer le module et un argument du nombre a' .

Pour la suite on admet que $a' = -4 + 4i\sqrt{3}$ et $c' = -4\sqrt{3} + 4i$.

4. On admet que si M et N sont deux points du plan d'affixes respectives m et n alors le milieu I du segment [MN] a pour affixe $\frac{m+n}{2}$ et la longueur MN est égale à $|n - m|$.

- (a) On note r , s et t les affixes des milieux respectifs R, S et T des segments [A'B], [B'C] et [C'A].

Calculer r et s . On admet que $t = 2 - 2\sqrt{3} + i(2 + 2\sqrt{3})$.

- (b) Quelle conjecture peut-on faire quant à la nature du triangle RST ?

Justifier ce résultat.

Correction

EXERCICE 1 énoncé Métropole 2015

1. Soit l'équation $z^2 - 8z + 64 = 0$.

$$\Delta = 64 - 4 \times 64 = -3 \times 64 < 0.$$

L'équation a deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{8 + i\sqrt{3 \times 64}}{2} = \boxed{4 + 4i\sqrt{3}} \text{ et } z_2 = \bar{z}_1 = \boxed{4 - 4i\sqrt{3}}.$$

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 4 + 4i\sqrt{3}$, $b = 4 - 4i\sqrt{3}$ et $c = 8i$. (figure à la fin de l'exercice)

(a) $|a| = |4 + 4i\sqrt{3}| = 4|1 + i\sqrt{3}| = 4 \times 2 = \boxed{8}$.

On en déduit $a = 8 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 8e^{i\frac{\pi}{3}}$. Un argument de a est donc $\frac{\pi}{3}$.

(b) On a trouvé $a = 8e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $b = \bar{a} = 8e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

(c) $|a| = 8$; $|b| = |\bar{a}| = |a| = 8$ et $|c| = |8i| = 8$. Les points A, B et C sont donc sur le cercle de centre O et de rayon 8.

(d) Voir figure en fin d'exercice.

3. On considère les points A', B' et C' d'affixes respectives $a' = ae^{i\frac{\pi}{3}}$, $b' = be^{i\frac{\pi}{3}}$ et $c' = ce^{i\frac{\pi}{3}}$.

(a) $b' = be^{i\frac{\pi}{3}} = 8e^{-i\frac{\pi}{3}} \times e^{i\frac{\pi}{3}} = \boxed{8}$.

(b) $|a'| = |ae^{i\frac{\pi}{3}}| = |a| \times |e^{i\frac{\pi}{3}}| = |a| = \boxed{8}$ car $|e^{i\theta}| = 1$ pour tout θ réel.

$$\arg(a') = \arg\left(ae^{i\frac{\pi}{3}}\right) = \arg(a) + \arg\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \boxed{\frac{2\pi}{3}}$$

Pour la suite on admet que $a' = -4 + 4i\sqrt{3}$ et $c' = -4\sqrt{3} + 4i$.

4. (a) On note r , s et t les affixes des milieux respectifs R, S et T des segments $[A'B]$, $[B'C]$ et $[C'A]$.

$$\text{On a : } r = \frac{a' + b}{2} = \frac{-4 + 4i\sqrt{3} + 4 - 4i\sqrt{3}}{2} = \boxed{0}.$$

$$s = \frac{b' + c}{2} = \frac{8 + 8i}{2} = 4 + 4i.$$

$$\text{On a admis que } t = 2 - 2\sqrt{3} + i(2 + 2\sqrt{3}).$$

(b) Il semble que la figure que RST soit un triangle équilatéral.

- $RS = |s - r| = |4 + 4i| = 4|1 + i| = \boxed{4\sqrt{2}}$.

- $ST = |t - s| = |-2 - 2\sqrt{3} + i(-2 + 2\sqrt{3})| = 2|-1 - \sqrt{3} + i(-1 + \sqrt{3})|$
 $= 2\sqrt{(-1 - \sqrt{3})^2 + (-1 + \sqrt{3})^2} = 2\sqrt{(1 + 2\sqrt{3} + 3) + (1 - 2\sqrt{3} + 3)} = 2\sqrt{8}$
 $= \boxed{4\sqrt{2}}$.

- $RT = |t - r| = |2 - 2\sqrt{3} + i(2 + 2\sqrt{3})|$
 $= 2|1 - \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3})| = 2\sqrt{1 - 2\sqrt{3} + 3 + 1 + 2\sqrt{3} + 3} = 2\sqrt{8}$
 $= \boxed{4\sqrt{2}}$.

$RS = ST = RT = 4\sqrt{2}$ donc le triangle RST est **équilatéral**.

