

Exercices 1 : module et argument, forme algébrique

EXERCICE 1 correction Pondichéry 2013

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On note i le nombre complexe tel que $i^2 = -1$.

On considère le point A d'affixe $z_A = 1$ et le point B d'affixe $z_B = i$.

À tout point M d'affixe $z_M = x + iy$, avec x et y deux réels tels que $y \neq 0$, on associe le point M' d'affixe $z_{M'} = -iz_M$.

On désigne par I le milieu du segment $[AM]$.

Le but de l'exercice est de montrer que pour tout point M n'appartenant pas à (OA) , la médiane (OI) du triangle OAM est aussi une hauteur du triangle OBM' (propriété 1) et que $BM' = 2OI$ (propriété 2).

1. Dans cette question et uniquement dans cette question, on prend

$$z_M = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

(a) Déterminer la forme algébrique de z_M .

(b) Montrer que $z_{M'} = -\sqrt{3} - i$.

Déterminer le module et un argument de $z_{M'}$.

(c) Placer les points A, B, M, M' et I dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ en prenant 2 cm pour unité graphique.

Tracer la droite (OI) et vérifier rapidement les propriétés 1 et 2 à l'aide du graphique.

2. On revient au cas général en prenant $z_M = x + iy$ avec $y \neq 0$.

(a) Déterminer l'affixe du point I en fonction de x et y .

(b) Déterminer l'affixe du point M' en fonction de x et y .

(c) Écrire les coordonnées des points I, B et M' .

(d) Montrer que la droite (OI) est une hauteur du triangle OBM' .

(e) Montrer que $BM' = 2OI$.

Correction

EXERCICE 1 énoncé **Pondichéry 2013**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Dans cette question et uniquement dans cette question, on prend $z_M = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

(a) $z_M = 2 \times \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 - i\sqrt{3}$.

(b) $z_{M'} = -iz_M = -i(1 - i\sqrt{3}) = -i + i^2\sqrt{3} = -\sqrt{3} - i$.

Module et argument méthode algébrique :

$|z_{M'}| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$ et si l'on nomme θ un argument de $z_{M'}$ alors, par propriété,

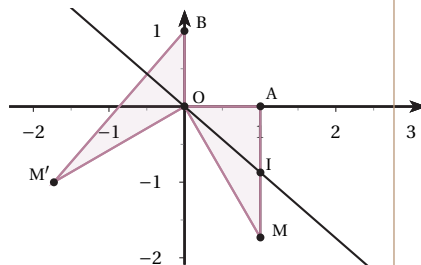
$$\begin{cases} \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ On reconnaît } \theta = -\frac{5\pi}{6} \text{ (modulo } 2\pi).$$

Module et argument par la forme exponentielle :

$|z_{M'}| = |-i| \times |z_M| = 1 \times |2e^{-i\frac{\pi}{3}}| = 2$

$\arg(z_{M'}) = \arg(-i) + \arg(z_M) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = -\frac{5\pi}{6}$ (modulo 2π).

(c) La figure n'est pas à l'échelle.
 Graphiquement on vérifie les propriétés 1 et 2.



2. Cas général en prenant $z_M = x + iy$ avec $y \neq 0$.

(a) $z_I = \frac{z_A + z_M}{2} = \frac{x+1}{2} + i \frac{y}{2}$.

(b) $z_{M'} = -i(x + iy) = y - ix$.

(c) $I\left(\frac{x+1}{2}; \frac{y}{2}\right)$, $B(0; 1)$ et $M'(y; -x)$.

(d) $\vec{OI} \cdot \vec{BM'} = \left(\frac{x+1}{2}\right) \times y + \left(\frac{y}{2}\right) \times (-x-1) = \frac{xy}{2} + \frac{1}{2} - \frac{xy}{2} - \frac{1}{2} = 0$ donc les droites (OI) et (BM') sont perpendiculaires.

(e) $BM' = \sqrt{y^2 + (-x-1)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$ et d'autre part, $2OI = 2\sqrt{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2} = \frac{2}{2}\sqrt{(x+1)^2 + y^2}$ donc

$2OI = BM'$.