Sommaire

Chapitre 1

Fondements, éléments de logique

I Logique élémentaire

1. Logique des propositions

Une proposition, ou assertion, est un énoncé qui est soit vrai soit faux et qui ne contient pas de variable.

Exemples 1 :

- $3 \geqslant 1$ est une assertion vraie.
- $n \geqslant 2$ n'est pas une assertion car cet énoncé contient une variable.
- $0 = 1$ est une assertion fausse.

Des opérations permettent, à partir d'une ou plusieurs assertions de fabriquer de nouvelles assertions.

La négation

Si A est une assertion on note $\neg\mathrm{A}$ ou $\overline{\mathrm{A}}$ la négation de A.
La négation est définie par la table de vérité ci-contre :

Négation	
A	$\overline{\mathrm{A}}$

Exemple 2 : Si A est l'assertion « 1 est inférieur à 3 », alors $\overline{\mathrm{A}}$ est l'assertion « 1 est strictement supérieur à 3 ».

Remarque :

Le « ET »

Le « ET » est souvent noté $\wedge$.
On le définit par la table de vérité ci-contre :

ET		
A	B	$\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}$

Le « OU »

Le « OU » est souvent noté $\vee$.
On le définit par la table de vérité ci-contre :

OU		
A	B	$A \vee B$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Remarque : ______

Propriété	loi de Morgan
$\overline{A \wedge B} \equiv$ ______	$\overline{A \vee B} \equiv$ ______ .

Démonstration : Montrons que $\overline{A \wedge B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}$:

A	B	$A \wedge B$	$\overline{A \wedge B}$
V	V		
V	F		
F	V		
F	F		

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \vee \overline{B}$
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

______

______ □

L'implication

On la note $\implies$ et elle est définie par la table de vérité suivante :

Implication		
A	B	$A \implies B$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Remarques :

- Dans la pratique, pour montrer que $(A \implies B)$ est vraie, ______

______

- $(A \Longrightarrow B)$ signifie que ____

____

____

- $(A \Longrightarrow B)$ signifie aussi que ____

____

____

⚠
- $(A \Longrightarrow B)$ ne sous-entend nullement la vérité de A. $(A \Longrightarrow B)$ n'est pas équivalent à « A donc B ». « A donc B » signifie que A est vraie **et** que $(A \Longrightarrow B)$.
- $(A \Longrightarrow B)$ est équivalent à $\left(\overline{A} \vee B\right)$, effectivement, formons la table de vérité de $\left(\overline{A} \vee B\right)$ et comparons-la à celle de $(A \Longrightarrow B)$:

A	B	$\overline{A}$	$\overline{A} \vee B$	$A \Longrightarrow B$
V	V			V
V	F			F
F	V			V
F	F			V

- $(B \Longrightarrow A)$ est appelée l'implication réciproque de $(A \Longrightarrow B)$.

L'équivalence

On la note $\Longleftrightarrow$ et elle est définie par la table de vérité ci-contre :

Équivalence		
A	B	$A \Longleftrightarrow B$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Remarques :

- Pour démontrer que $(A \Longleftrightarrow B)$, la plupart du temps on procède par double implications, c'est à dire que l'on va montrer que $(A \Longrightarrow B)$ puis que $(B \Longrightarrow A)$.
- $(A \Longleftrightarrow B)$ signifie :
  - ____
  - ____
  - ____

Dans la propriété qui suit nous allons donner des couples de propositions qui ont la même table de vérité. Pour démontrer un résultat, vous aurez souvent à passer d'une proposition à une autre. La liste ci-dessous n'est bien sûr pas exhaustive mais elle regroupe les équivalences logiques les plus importantes.

Propriété

A, B et C désignent des propositions quelconques.

- $\overline{A \wedge B} \equiv$ ______________________________
- $\overline{A \vee B} \equiv$ ______________________________
- $A \wedge (B \vee C) \equiv$ ______________________________
- $A \vee \left(B \wedge C\right) \equiv$ ______________________________
- $A \implies B \equiv$ ____________________
- $A \implies B \equiv$ ______________________________
- $A \vee B \implies C \equiv$ ______________________________

Propriété — Quelques négations

- $\overline{A \implies B} \equiv$ ______________________________
- $\overline{A \iff B} \equiv$ ______________________________

Définition — tautologie

Une **tautologie** est une proposition qui est toujours vraie.

Exemple 3 :

- $\left(A \vee \overline{A}\right)$ est une tautologie :

$A \vee \overline{A}$		
A	$\overline{A}$	$A \vee \overline{A}$

- $\left(A \implies A\right)$ est une tautologie :

$A \implies A$	
A	$A \implies A$

2. Logique des prédicats, quantification

On appelle prédicat tout énoncé contenant des lettres $x, y, \ldots$ dites variables telles que, lorsque ces variables sont remplacées par des éléments d'un ensemble, $\mathrm{E}, \mathrm{F}, \ldots$ on obtient une assertion.
$\mathrm{E}, \mathrm{F}, \ldots$ constituent le référentiel du prédicat.

Exemples 4 :

- « $x \geqslant 3$ » est un prédicat et le référentiel est $\mathbb{R}$;
- « $2^{2^n}+1$ est un nombre premier » est un prédicat et le référentiel est $\mathbb{N}$.

Définition — quantificateur existentiel

Soit P un prédicat. On écrit

$$\exists x \in \mathrm{E},\ \mathrm{P}(x)$$

pour dire qu'il **existe au moins un** x de l'ensemble E qui rend $\mathrm{P}(x)$ vraie.

Exemple 5 : Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. $(\exists n \in \mathbb{N},\ 2^{2^n}+1 \in \mathcal{P})$ est vraie

Remarques :

- Comment démontrer un énoncé du type $(\exists x \in \mathrm{E},\ \mathrm{P}(x))$?
- Certains théorème nous assure de l'existence d'un objet sans pour autant nous donner de valeur explicite. Par exemple,
- $(\exists x \in \mathrm{E},\ \mathrm{P}(x))$ assure l'existence d'un x qui rend $\mathrm{P}(x)$ vraie mais il peut y en avoir plusieurs :
- Si l'on veut dire qu'il existe un x unique de E rendant $\mathrm{P}(x)$ vraie on écrit :

Définition — quantificateur universel

Soit P un prédicat. On écrit

$$\forall x \in \mathrm{E},\ \mathrm{P}(x)$$

pour dire que **pour tout** x de l'ensemble E, $\mathrm{P}(x)$ est vraie.

Exemple 6 : Soit $\mathcal{I}$ l'ensemble des entiers impairs. $(\forall n \in \mathbb{N},\ 2n+1 \in \mathcal{I})$ est vraie.

Remarque : Comment démontrer un énoncé du type ($\forall x \in \mathrm{E},\ \mathrm{P}(x)$) ?
On doit montrer que pour tout $x \in \mathrm{E}$, $\mathrm{P}(x)$ est vraie.

La démonstration va donc commencer par

Exemple 7 : Montrons que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 - 6x + 11 > 0.$$

Bien entendu dans ce cas on aurait pu calculer le discriminant et conclure directement !

Proposition

Soit P un prédicat.

- La négation de $\forall x \in \mathrm{E},\ \mathrm{P}(x)$ est
- La négation de $\exists x \in \mathrm{E},\ \mathrm{P}(x)$ est

Exemple 8 : Soit I un intervalle et f une fonction définie sur I. La négation de ($\forall x \in \mathrm{I},\ f(x) = 0$) est :

Remarque :

- Pour prouver qu'un énoncé du type $\left(\forall x \in \mathrm{E},\ \mathrm{P}(x)\right)$ est faux
- Dans la suite du cours nous allons rencontrer des expressions qui contiennent plusieurs quantificateurs comme par exemple des expressions du type $\left(\forall x \in \mathrm{E},\ \exists y \in \mathrm{F},\ \mathrm{P}(x, y)\right)$ ou $\left(\forall x \in \mathrm{E},\ \forall y \in \mathrm{F},\ \mathrm{P}(x, y)\right)$.
  Attention ! En général on ne peut pas intervertir $\forall$ et $\exists$. $\left(\forall x \in \mathrm{E},\ \exists y \in \mathrm{F},\ \mathrm{P}(x, y)\right)$ et $\left(\exists y \in \mathrm{F},\ \forall x \in \mathrm{E},\ \mathrm{P}(x, y)\right)$ ne sont pas équivalents.

Propriété — règles de distributivité

Soient P et Q des prédicats. On a :

- $\forall x \in \mathrm{E},\ \left(\mathrm{P}(x) \wedge \mathrm{Q}(x)\right) \equiv$
- $\exists x \in \mathrm{E},\ \left(\mathrm{P}(x) \vee \mathrm{Q}(x)\right) \equiv$

Remarque :

- $\forall x \in \mathrm{E},\ \left(\mathrm{P}(x) \vee \mathrm{Q}(x)\right) \not\equiv \left(\forall x \in \mathrm{E},\ \mathrm{P}(x)\right) \vee \left(\forall x \in \mathrm{E},\ \mathrm{Q}(x)\right)$.
- $\exists x \in \mathrm{E},\ \left(\mathrm{P}(x) \wedge \mathrm{Q}(x)\right) \not\equiv \left(\exists x \in \mathrm{E},\ \mathrm{P}(x)\right) \wedge \left(\exists x \in \mathrm{E},\ \mathrm{Q}(x)\right)$.

II Types de raisonnements

1. Raisonnement direct par enchaînement d'implications (modus ponens)

Proposition — modus ponens

Si A est vraie et si $(\mathrm{A} \Longrightarrow \mathrm{B})$ alors B est vraie.

Exemple 1 : Soit le théorème :

Si un entier est pair alors son carré est pair.

Montrons que $15\,478^2$ est pair.

2. Raisonnement par contraposition (modus tollens)

Proposition — modus tollens

$(\mathrm{A} \Longrightarrow \mathrm{B})$ est équivalente à $(\overline{\mathrm{B}} \Longrightarrow \overline{\mathrm{A}})$.

Exemple 2 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que si n^2 est pair alors n est pair.

3. Raisonnement par l'absurde

Méthode — raisonnement par l'absurde

Pour démontrer une proposition A on suppose que sa négation est vraie et montre que cela conduit à une contradiction.

Exemple 3 : $\sqrt{2}$ est un irrationnel. (voir l'exercice 22)

4. Par disjonction des cas

Proposition — disjonction des cas

Si $(\mathrm{A}_1 \Longrightarrow \mathrm{B})$ et si $(\mathrm{A}_2 \Longrightarrow \mathrm{B})$ alors $(\mathrm{A}_1 \vee \mathrm{A}_2 \Longrightarrow \mathrm{B})$.

Exemple 4 : Montrons que, pour tout entier n, $\dfrac{n(n+1)}{2}$ est un entier.

5. Raisonnement par récurrence

Rappel(s)

Soit P_n une propriété dépendant d'un entier naturel n.
Pour démontrer que P_n est vraie pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, où n_0 est un entier naturel, on peut utiliser le principe de la démonstration par récurrence :

Si :
- P_{n_0} est vraie (initialisation) ;
- $\forall n \geqslant n_0,\ \mathrm{P}_n \Longrightarrow \mathrm{P}_{n+1}$ (hérédité),

alors pour tout $n \geqslant n_0$ la propriété P_n est vraie.

Exemple 5 : L'initialisation est importante.
Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $r = 2$.
On considère la propriété P_n : « $u_n = 2n$ ».
Montrons que P_n est héréditaire.

Théorème — récurrence d'ordre k

Soit P_n une propriété dépendant d'un entier naturel n et n_0 un entier naturel.

Si :
- $\mathrm{P}_{n_0}, \mathrm{P}_{n_0+1}, \ldots, \mathrm{P}_{n_0+k-1}$ sont vraies (initialisation) ;
- $\forall n \geqslant n_0,\ \mathrm{P}_n \wedge \mathrm{P}_{n+1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{P}_{n+k-1} \Longrightarrow \mathrm{P}_{n+k}$ (hérédité),

alors pour tout $n \geqslant n_0$ la propriété P_n est vraie.

Exemple 6 : Soit (F_n) la suite définie par $\mathrm{F}_0 = 1$, $\mathrm{F}_1 = 2$, $\mathrm{F}_2 = 5$ et pour tout $n \geqslant 3$, $\mathrm{F}_{n+3} = \mathrm{F}_n + \mathrm{F}_{n+1} + \mathrm{F}_{n+2}$.
Montrons que pour tout $n \geqslant 0$, $\mathrm{F}_n \geqslant 0$.

Théorème — récurrence forte

Soit P_n une propriété dépendant d'un entier naturel n et n_0 un entier naturel.

Si :
- P_{n_0} est vraie (initialisation) ;
- $\forall n \geqslant n_0$, $\mathrm{P}_{n_0} \wedge \mathrm{P}_{n_0+1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{P}_n \Longrightarrow \mathrm{P}_{n+1}$ (hérédité),

alors pour tout $n \geqslant n_0$ la propriété P_n est vraie.

Exemple 7 : Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \begin{cases} 2u_{\frac{n}{2}} + 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ u_n + 1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n$.

III Applications

1. Définitions

Définition — applications

Soit E et F deux ensembles. Une application définie sur E à valeur dans F

$$\begin{aligned} f : \mathrm{E} &\to \mathrm{F} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

est une relation qui à chaque $x \in \mathrm{E}$ associe un unique élément $y \in \mathrm{F}$.
On note $y = f(x)$.

- $f(x)$ est l'image de x par f ;
- x est un antécédent de y par f.

Différences entre applications et fonctions

Une fonction et une application sont des relations qui donne un processus de correspondance entre deux ensembles. Cependant, dans le cas d'une application ce processus est toujours tenu d'aboutir.

Par exemple, si on considère les ensembles $\mathrm{E} = \mathbb{R}$ et $\mathrm{F} = \mathbb{R}$ ainsi que les expressions suivantes :

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = 2x - 5, \quad h(x) = \sqrt{x}, \quad i(x) = \frac{1}{x-5}.$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut calculer x^2 et $2x-5$. Le processus aboutit à chaque fois, f et g sont donc des applications ;
- on ne peut pas calculer $h(-2)$ et $i(5)$, h et i ne sont pas des applications mais des fonctions car le processus n'aboutit pas toujours.

Si on considère $\mathbb{R}^+$ au lieu de $\mathbb{R}$ alors h devient une application. Ainsi

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} i : \mathbb{R} \setminus \{5\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x-5} \end{aligned}$$

sont des applications.

2. Composition

Définition

Soient deux applications $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$.
La composée de f par g est la fonction notée $g \circ f$ définie par

$$\begin{aligned} g \circ f : \mathrm{E} &\to \mathrm{G} \\ x &\mapsto g\big(f(x)\big) \end{aligned}$$

Exemple 1 : Soient $\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned}$ et $\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \cos(x) \end{aligned}$

3. Injection, surjection, bijection

Définition — injection

Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application.
On dit que f est injective (ou que f est une injection) lorsque

$$\forall (x, x') \in \mathrm{E}^2,\ f(x) = f(x') \implies x = x';$$

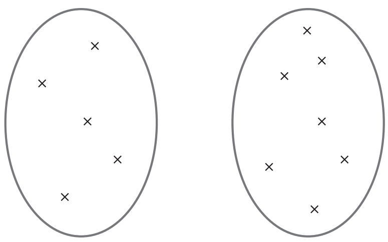
ou, d'une manière équivalente,

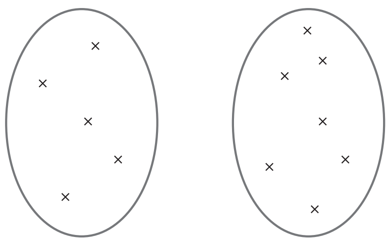
$$\forall (x, x') \in \mathrm{E}^2,\ x \neq x' \implies f(x) \neq f(x').$$

En langage naturel, on peut dire qu'une injection f de E dans F est une application telle que :

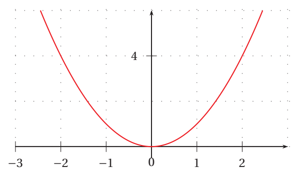
- toutes les fois que deux éléments de E sont distincts, leurs images sont distinctes ;
- aucun élément de F n'est l'image de plus d'un élément de E ;
- les éléments de F ont au plus un antécédent par f.

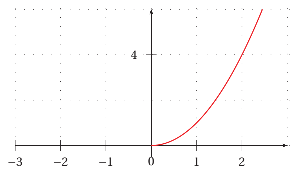
Illustration à l'aide d'un diagramme sagittal





Exemple 2 :





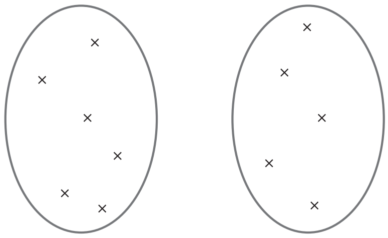
Définition — surjection

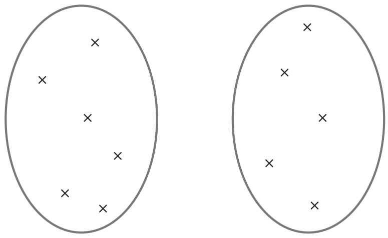
Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application.
On dit que f est surjective (ou que f est une surjection) lorsque

$$\forall y \in \mathrm{F},\ \exists x \in \mathrm{E},\ y = f(x).$$

En langage naturel, on peut dire qu'une surjection de E dans F est une application dont tous les éléments de F ont au moins un antécédent.

Illustration à l'aide d'un diagramme sagittal





Exemple 3 :

Méthode

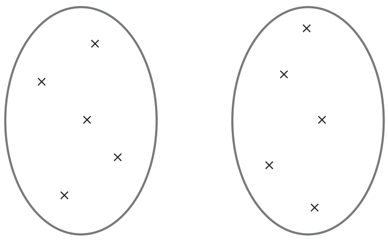
- Pour montrer qu'une application f est surjective, on fixe un élément y quelconque de F et on montre qu'il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $y = f(x)$;
- pour montrer que f n'est pas surjective il suffit de trouver un élément y de F qui n'a pas d'antécédent.

Définition — bijection

Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application.
On dit que f est une bijection (ou que f est bijective) lorsque f est à la fois injective et surjective :

$$\forall y \in \mathrm{F},\ \exists! x \in \mathrm{E},\ \ y = f(x).$$

Illustration à l'aide d'un diagramme sagittal



Exemple 4 :

Théorème

Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f est bijective ;

(ii) il existe une application $g : \mathrm{F} \to \mathrm{E}$ telle que $g \circ f = id_{\mathrm{E}}$ et $f \circ g = id_{\mathrm{F}}$.

De plus l'application g est unique.

Démonstration :

$\Rightarrow$)

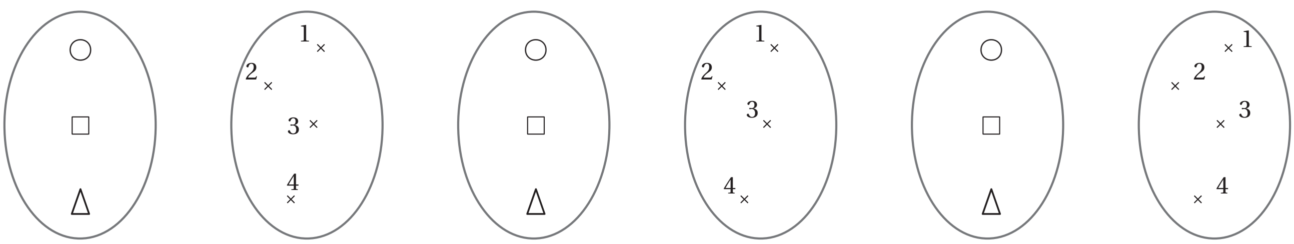
$\Leftarrow$) voir l'exercice 33. $\square$

Définition

L'application g telle que $g \circ f = id_{\mathrm{E}}$ et $f \circ g = id_{\mathrm{F}}$ est appelée application réciproque de f et est notée f^{-1}.
Lorsqu'une telle application existe on dit que f est inversible.

Remarque :

On peut avoir $f \circ g = id_{\mathrm{F}}$ et $g \circ f \neq id_{\mathrm{E}}$, dans ce cas f n'est pas une bijection



IV Calcul de sommes

1. Le Symbole Σ

Notation : soient n un entier naturel et a_0, $a_1, \dots, a_n$ des nombres réels

$$a_0 + a_1 + \dots + a_n = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Si $p \in [\![0;n]\!]$, __________

Plus généralement, si I est une partie finie de $\mathbb{N}$

____

Par convention, si $\mathrm{I} = \emptyset$, $\sum_{k \in \mathrm{I}} a_k = 0$.

Propriété

I est une partie finie de $\mathbb{N}$. Soient $(a_k)_{k \in \mathrm{I}}$ et $(b_k)_{k \in \mathrm{I}}$ deux familles finies de réels.

- linéarité :
  - $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\sum_{k \in \mathrm{I}} \lambda a_k = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$
  - $\sum_{k \in \mathrm{I}} (a_k + b_k) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$
  - d'une manière générale :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \sum_{k \in \mathrm{I}} (\lambda a_k + b_k) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

- Sommation par paquets : si $\mathrm{I} = \mathrm{I}_1 \cup \mathrm{I}_2$ et $\mathrm{I}_1 \cap \mathrm{I}_2 = \emptyset$ alors

$$\sum_{k \in \mathrm{I}} a_k = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

- Relation de Chasles : si $\mathrm{I} = [\![m;n]\!]$ et $q \in [\![m;n-1]\!]$ alors

$$\sum_{k \in \mathrm{I}} a_k = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

- Changement d'indice :
  - Décalage (sans inversion de l'ordre) : on pose $k = k' + q$ où $q \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

  - Décalage (avec inversion de l'ordre) : on pose $k = -k' + q$ où $q \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Exemples 1 :

- $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

____

- $\displaystyle\sum_{k=2}^{5} k^3 =$ ______

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k^2}$. On pose $\mathrm{I} = \{k \in [\![1;2n]\!] \mid k \text{ est pair}\}$ et $\mathrm{J} = \{k \in [\![1;2n]\!] \mid k \text{ est impair}\}$.

  $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k^2} =$ ______

- Montrons que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,(a_{k-1} - a_k) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k\right) - n a_n$.

Remarque :

- Dans l'écriture $\mathrm{S} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$, k est une variable muette. Cela signifie qu'elle peut être remplacée par une autre lettre qui ne désigne pas une variable, par exemple j : $\mathrm{S} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{j=0}^{n} a_j$. Cela signifie aussi que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$ peut se définir sans utiliser la lettre k : par exemple on peut dire que S est la somme des $n+1$ réels qui compose la famille $a_0, a_1, \ldots, a_n$. On dit que $\sum$ est un symbole mutificateur. $\prod$, $\int$, lim, $\forall$, $\exists$ en sont d'autres…

- Pour des raisons de simplicité nous avons choisi des indices qui appartiennent à $\mathbb{N}$, mais rien n'interdit d'utiliser des indices négatifs tant que l'expression à du sens. Par exemple

$$\sum_{k=-2}^{1} (3k) = 3 \times (-2) + 3 \times (-1) + 3 \times 0 + 3 \times 1 = -6.$$

2. Sommes usuelles à connaître

- Somme télescopique : soit $(a_k)_{m \leqslant k \leqslant n+1}$ une famille de nombre réels.

$$\sum_{k=m}^{n} (a_{k+1} - a_k) = \text{______}$$

- Somme avec un terme constant : soit c un réel

$$\sum_{k=m}^{n} c = \text{______}$$

- Somme de 1 à n :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

- Somme des carrés :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

- Somme de q^n :

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

3. Binôme de Newton

Définition

On considère un schéma de n épreuves de Bernoulli représenté par un arbre.

Pour tout entier k compris entre 0 et n, le nombre de chemins de l'arbre réalisant k succès est noté $\binom{n}{k}$.

Les nombres $\binom{n}{k}$, $0 \leqslant k \leqslant n$, sont appelés les **coefficients binomiaux**.

Propriété

Pour tous entiers naturels n et k tels que $0 \leqslant k \leqslant n$,

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}.$$

Propriété — relation de Pascal

Pour tous entiers naturels n et k tels que $0 \leqslant k \leqslant n-1$,

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Conséquence : le triangle de Pascal

Cette relation permet de calculer pas à pas les coefficients binomiaux : on convient que $\binom{0}{0} = 1$.

n \ k	0	1	2	3	4	5	
0							
1							
2							
3							
4							
5							

Théorème — binôme de Newtow

Soient a et b deux nombres réels et $n \in \mathbb{N}$.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Démonstration :

$\square$

Logique propositionnelle

1

Soient A et B deux propositions. Si l'on dit que A est vraie si B est vraie, cela signifie que, pour A, B est une condition :

- ☐ ni nécessaire, ni suffisante ;
- ☐ nécessaire ;
- ☐ nécessaire et suffisante ;
- ☐ suffisante.

2

Soient A et B deux propositions. Si l'on dit que A est vraie si, et seulement si, B est vraie, cela signifie que pour A, B est une condition :

- ☐ ni nécessaire, ni suffisante ;
- ☐ nécessaire ;
- ☐ nécessaire et suffisante ;
- ☐ suffisante.

3

Soient A et B deux propositions. Si l'on dit que A est vraie seulement si B est vraie, cela signifie que pour A, B est une condition :

- ☐ ni nécessaire, ni suffisante ;
- ☐ nécessaire ;
- ☐ nécessaire et suffisante ;
- ☐ suffisante.

4

Soient A et B deux propositions. Si l'on dit que A est condition nécessaire de B, cela signifie que A est fausse .... B est fausse.

- ☐ seulement si ;
- ☐ si ;
- ☐ si, et seulement si.

5

Soient A et B deux propositions. Si l'on dit que A est fausse si B est fausse, cela signifie que pour A, B est une condition :

- ☐ ni nécessaire, ni suffisante ;
- ☐ nécessaire ;
- ☐ nécessaire et suffisante ;
- ☐ suffisante.

6

Soient A : « si il est français alors il porte un béret ou il aime le camembert »

B : « si il ne porte pas de béret et si il n'aime pas le camembert alors il n'est pas français »

La proposition B est :

- ☐ la réciproque de A ;
- ☐ la contraposée de A ;
- ☐ ni l'une ni l'autre.

7

Soient A : « si il est belge ou si il aime les frites alors il roule en vélo »

B : « si il roule en vélo alors il n'est pas belge ou il n'aime pas les frites »

La proposition B est :

- ☐ la réciproque de A ;
- ☐ la contraposée de A ;
- ☐ ni l'une ni l'autre.

8

Soient A : « si il fait du judo ou si il roule en vélo alors il aime les chips »

B : « si il aime les chips alors il fait du judo ou il aime les chips »

La proposition B est :

- ☐ la réciproque de A ;
- ☐ la contraposée de A ;
- ☐ ni l'une ni l'autre.

9

« Si il pleut alors je vais au cinéma »
Énoncer la contraposée et la réciproque de cette proposition.
Vous me rencontrez et je vous dis que je suis allé au cinéma, que peut-on en conclure ?

10

Soient A : « vous êtes nul en athlétisme »

B : « vous êtes fort en natation »

On considère la proposition P suivante : « si vous êtes nul en athlétisme ou si vous êtes fort en natation alors vous êtes nul en athlétisme et vous êtes fort en natation ».
P est-elle une tautologie ?

11

Soient a et b des entiers et A la proposition : « ab est impair ».
Pour que « $a+b$ soit pair », la proposition A est :

- ☐ ni nécessaire, ni suffisante ;
- ☐ nécessaire (seulement) ;
- ☐ nécessaire et suffisante ;
- ☐ suffisante (seulement).

12

Soient a et b des entiers et A la proposition : « ab est pair ».
Pour que « $a+b$ soit impair », la proposition A est :

- ☐ ni nécessaire, ni suffisante ;
- ☐ nécessaire (seulement) ;
- ☐ nécessaire et suffisante ;
- ☐ suffisante (seulement).

13

On considère l'implication suivante, où x désigne un réel :

$$x^2 < x \Longrightarrow x < 1.$$

1. Cette implication est-elle vraie ou fausse ?

2. Énoncer la réciproque et dire si elle est vraie.

14

On considère la proposition suivante :

$$\left(\left(A \vee \overline{B}\right) \Longrightarrow (R \wedge T)\right).$$

1. Donner sa table de vérité.

2. Compléter la proposition suivante de sorte qu'elle soit équivalent à la précédente :

$$\left(\overline{\ldots} \wedge \ldots\right) \vee \left(\ldots \wedge \ldots\right).$$

15

On définit un nouvel opérateur, noté « | » et appelé *barre de Sheffer*, par la table de vérité suivante :

barre de Sheffer		
A	B	A | B
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

1. Montrer que $A \mid B \equiv \overline{A \wedge B}$.

2. (a) Montrer que $\overline{A} \equiv A \mid A$;

(b) Montrer que $A \wedge B \equiv (A \mid B) \mid (A \mid B)$.

3. Trouver une proposition équivalente à $(A \vee B)$ qui fait *uniquement* intervenir l'opérateur « | ».

Quantificateurs

16

Donner la négation des phrases suivantes :

1. « Aucun mathématicien n'est fou » ;

2. « Il existe des cygnes noirs » ;

3. « Certains élèves sont bilingues ».

17

Utiliser la règle $\overline{\overline{A}} \equiv A$ pour simplifier la phrase suivante, extraite d'un compte rendu d'un match de football :
« …il ne se trouvera aucun sportif pour nier que le contraire n'eût été immérité… ».

18

1. Symboliser la phrase suivante : « seuls les médecins peuvent prescrire des médicaments » en utilisant E pour désigner l'ensemble de la population, x un individu quelconque, $A(x)$ pour « x est médecin » et $B(x)$ pour « x peut prescrire des médicaments ».

2. Donner la négation de la formule précédente et formuler une phrase en langage naturel qui lui corresponde.

19

Dire si les propositions sont vraies et dans le cas contraire donner leur négation.

1. $\exists A \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \sqrt{n} \leqslant A$;

2. $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \exists n \in \mathbb{N},\ \dfrac{1}{n} \leqslant x$.

20

Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses :

1. $\forall x \in \mathbb{Z},\ \exists y \in \mathbb{Z},\ |x-y| < 1$;

2. $\exists x \in \mathbb{Z},\ \forall y \in \mathbb{Z},\ |x-y| < 1$;

3. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ y < x^2$;

4. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ y^2 > x$;

5. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ y^2 < x$;

6. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ y^2 > x$.

21

Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in [0;1],\ 1 + x + x^2 \ldots + x^n \leqslant M$;

2. $\forall x \in [0;1],\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists M \in \mathbb{R},\ 1 + x + x^2 \ldots + x^n \leqslant M$;

3. $\forall x \in [0;1],\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 + x + x^2 \ldots + x^n \leqslant M$.

Types de raisonnements

22

Montrer que $\sqrt{2}$ est un irrationnel. On rappelle qu'un irrationnel est nombre qui n'est pas égal à un quotient d'entiers.

23

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $n! \geqslant 2^{n-1}$ où
$\begin{cases} n! = 1 \times 2 \times \ldots \times (n-1) \times n & \text{si } n \neq 0 \\ 0! = 1 \end{cases}$

2. On définit une suite réelle (u_n) par : $u_0 = u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^{n+1} + (-1)^n.$$

24

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n. \end{cases}$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 2^n$.

25

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \geqslant 2$ par

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $u_n \notin \mathbb{N}$.

Applications

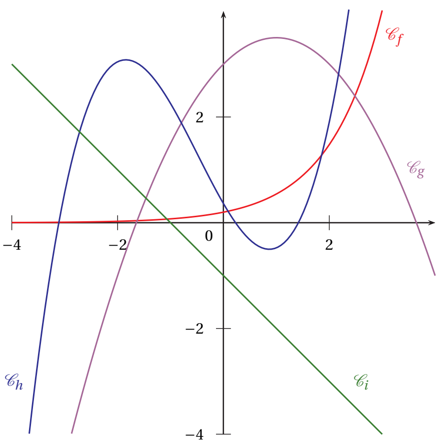
26

Soient $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 - 5 \end{array}$ et $\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} \setminus \{-1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x-1}{x+1} \end{array}$.

Donner les ensembles de définition de $g \circ f$ et $f \circ g$ ainsi que leurs expressions.

27

On a représenté ci-dessous quatre applications f, g, h et i, définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Dire, à l'allure de la courbe, si elles sont injectives, surjectives, bijectives.



28

La digestion d'un nombre réel s'obtient en calculant le quotient de la différence du triple de ce nombre et de 5 par la somme de ce nombre et de 1.
Un nombre est dit être digéré deux fois lorsque le résultat obtenu après la digestion est à son tour digéré.

1. On suppose qu'un nombre peut-être digéré autant de fois que l'on veut. Qu'advient-il d'un nombre digéré 2020 fois ?

2. Existe-t-il des nombres qu'on ne peut digérer qu'une fois, que deux fois, que quelques fois, jamais ?

29

1. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}.$$

f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

2. Soit $\begin{array}{rcl} g : \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & 2n \end{array}$. Est-ce que g, $g \circ f$, $f \circ g$ sont injectives, surjectives, bijectives ?

30

Dans chacun des cas suivants, déterminer si la fonction f est injective, surjective, bijective.

1. $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(x) \end{array}$

2. $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* & \to & \mathbb{Q} \\ (p,q) & \mapsto & \frac{p}{q} \end{array}$

3. $\begin{array}{rcl} f : [\![0;100]\!] & \to & [\![0;16]\!] \\ n & \mapsto & f(n) \end{array}$ où $f(n)$ est le reste de la division de n par 17 ($[\![$ et $]\!]$ servent à écrire des intervalles d'entiers, on a par exemple $[\![0;100]\!] = \{0;1;\ldots;100\}$).

31

Soit $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} \setminus \{2\} & \to & \mathbb{R} \setminus \{3\} \\ x & \mapsto & \frac{3x-1}{x-2} \end{array}$. Montrer que f est bijective et donner l'expression de l'application réciproque f^{-1}.

32

Soient $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$ et $\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $g \circ f(x) = x$. En déduire que $g \circ f = id_{\mathbb{R}^+}$. $g \circ f$ est-elle bijective ?

2. (a) f est-elle injective, surjective, bijective ?

(b) g est-elle injective, surjective, bijective ?

3. Montrer que $f \circ g \neq id_{\mathbb{R}}$.

33

Soient E et F deux ensembles et $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \to \mathrm{E}$ deux applications.

1. Montrer que si $g \circ f = id_{\mathrm{E}}$, alors g est surjective et f est injective.

2. On suppose $g \circ f = id_{\mathrm{E}}$, et que l'une des deux applications f ou g est bijective. Montrer que l'autre est aussi bijective.

3. Montrer que si $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bijectives, alors f et g sont bijectives.

34

Soient $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$, $g : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ des applications bijectives. Montrer que $g \circ f$ est bijective et que son application réciproque est $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

35

Soit f une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que :

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ n+5 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Pour tout entier $k \geqslant 1$, on pose $f^k = f \circ f \circ \ldots \circ f$ (k fois), autrement dit $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f, \ldots$
Montrer que pour tout entier naturel n non nul, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^k(n) \in \{1,5\}$.

Calculs de sommes

36

Calculer les sommes suivantes (en fonction de n éventuellement) :

1. $\displaystyle\sum_{k=-4}^{30}(10k+4)$.

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{100}\left(\sum_{i=0}^{k}2^i\right)$.

3. $\displaystyle\sum_{k=4}^{n}\frac{3^k}{4^{k+1}}$.

4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{5}\right)^{k+2}$.

37

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Donner une expression simple de la somme des n premiers entiers impairs :

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1).$$

38

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on définit

$$\mathrm{S}_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2},\quad \mathrm{T}_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k+1)^2}\ \text{ et }\ \mathrm{U}_n=\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^k}{k^2}.$$

1. En décomposant la somme S_{2n+1} suivant les indices pairs et impairs, exprimer T_n en fonction de S_{2n+1} et S_n.

2. En décomposant la somme de U_n suivant les indices pairs et impairs, exprimer U_n en fonction de S_n et T_n puis de S_{2n+1} et S_n.

39

Somme des carrés et des cubes par télescopage

1. Soit P le polynôme défini, pour tout $x\in\mathbb{R}$, par $\mathrm{P}(x)=ax^3+bx^2+cx$, où a, b et c sont trois réels.

(a) Déterminer a, b et c tels que

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{P}(x)-\mathrm{P}(x-1)=x^2$$

(b) En déduire une expression simple de

$$\sum_{k=1}^{n}k^2.$$

2. Adapter la méthode précédente pour calculer

$$\sum_{k=1}^{n}k^3.$$

Chapitre 2

Suites et séries numériques

I Limite, de la définition de terminale à celle du supérieur

1. Limite finie d'une suite (terminale)

Définition

Soit (u_n) une suite numérique et ℓ un réel.
Dire que la suite (u_n) admet pour limite ℓ signifie que, tout intervalle ouvert contenant ℓ, contient tous les termes u_n de la suite (u_n) à partir d'un certain rang N.

2. Limite finie d'une suite (supérieur)

Définition

Soit (u_n) une suite numérique et ℓ un réel.
Dire que la suite (u_n) admet pour limite ℓ signifie que,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \ n \geqslant \mathrm{N} \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

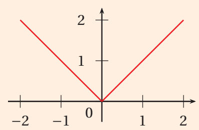
Remarque : Une formulation équivalente qui sera souvent utilisée par la suite est :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant \mathrm{N},\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

(a) Quelques rappels sur la valeur absolue pour bien comprendre cette définition

Définition — algébrique

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



Définition — géométrique

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}$ la droite des réels d'origine O. Si x est l'abscisse d'un point M de la droite des réels alors

$$|x| = \mathrm{OM}.$$

Définition — distance

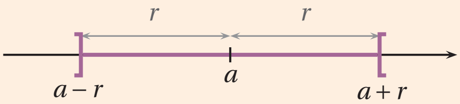
Soient $\mathrm{A}(a)$ et $\mathrm{B}(b)$ deux points de la droite des réels.

$$\mathrm{AB} = d(a,b) = |a-b| = |b-a|.$$

Inégalités, intervalles et valeurs absolues

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $r > 0$.

- $|x-a| < r \iff$ ______________ $\iff$ ______________



- $|x-a| > r \iff$ ______________ $\iff$ ______________

Propriété — **inégalité triangulaire**

- Pour tous réels x et y,
$$|x+y| \leqslant |x| + |y|.$$
- Pour tous réels x et y,
$$\big||x| - |y|\big| \leqslant |x+y|.$$

Démonstration : voir exercice 1

(b) Équivalence entre la définition de terminale et celle du supérieur

Soit ℓ un réel quelconque, T_ℓ l'ensemble des suites qui admettent ℓ comme limite au sens de la définition de terminale et S_ℓ l'ensemble des suites qui admettent ℓ comme limite au sens de la définition du supérieur.

Montrons que $\mathrm{T}_\ell = \mathrm{S}_\ell$.

- Montrons que $\mathrm{S}_\ell \subset \mathrm{T}_\ell$:

- Montrons que $\mathrm{T}_\ell \subset \mathrm{S}_\ell$:

□ Conclusion : pour tout $\ell \in \mathbb{R}$, $T_\ell = S_\ell$, les deux définitions sont donc équivalentes.

(c) Remarque : Peut-on remplacer $\forall \varepsilon > 0$ par $\forall \varepsilon \geqslant 0$ dans l'expression

$$\boldsymbol{\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon ?}$$

Si, dans la définition de la limite d'une suite on prenait $\forall \varepsilon \geqslant 0$, une suite convergente serait une suite telle que en prenant $\varepsilon = 0$, il existerait N_0 tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N_0 \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant 0$, c'est à dire qu'à partir de N_0, $u_n = \ell$. Avec cette définition, seules les suites stationnaires à partir d'un certain rang seraient convergentes !

(d) Négation : exprimer que ℓ n'est pas la limite de (u_n)

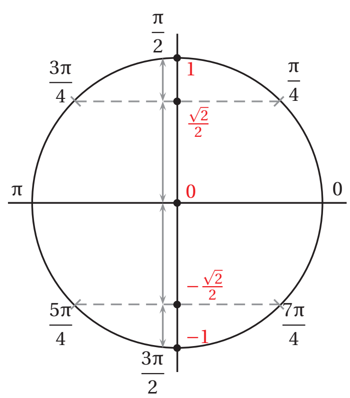
La négation de la proposition

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

s'écrit

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N},\ \big(n \geqslant N\big) \wedge \big(|u_n - \ell| > \varepsilon\big).$$

Exemple 1 : Soit (u_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \sin\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)$.
Montrons que cette suite n'a pas de limite.



3. Limite infinie

Définition — limite infinie

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ signifie que
$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Longrightarrow u_n \geqslant A;$$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ signifie que
$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Longrightarrow u_n \leqslant A.$$

Exemple 2 : Soit (u_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = n^2 + n\sin(n\pi)$.
Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

4. Suites convergentes

Définition — suites convergentes

On dit qu'une suite est convergente lorsqu'elle admet une limite finie, sinon on dit qu'elle est divergente.

Théorème

- Toute suite croissante majorée converge ;
- toute suite décroissante minorée converge.

Définition — suites extraites

On appelle **suite extraite** de la suite (u_n) une suite constituée de certains termes de (u_n). Plus précisément, une suite extraite de (u_n) est une suite de la forme $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Exemple 3 : (u_{2n}), (u_{2n+1}), $\left(u_{n^2}\right)$ sont des suites extraites de (u_n).

Théorème

Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente et a la même limite.

Démonstration : voir exercice 5 □

Exemple 4 : Reprenons l'exemple de la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$.

Proposition

Soit (u_n) une suite. Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite ℓ, alors (u_n) converge vers ℓ.

Démonstration :

$\square$

5. Limites et comparaisons

(a) Théorème des gendarmes et de comparaisons

Théorème — des gendarmes

Si

- $\square$ pour tout entier n à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$;
- $\square$ $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = l$,

alors

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = l\,.$$

Théorème — de comparaisons

Si

- $\square$ pour tout entier n à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$;
- $\square$ $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$,

alors

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty\,.$$

Si

- $\square$ pour tout entier n à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$;
- $\square$ $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$,

alors

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty\,.$$

(b) Théorème de l'ordre

Théorème — de l'ordre

Si

- pour tout entier n à partir d'un certain rang, $u_n < v_n$;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l'$,

alors

$l \leqslant l'$.

Exemple 5 : Soient les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2 - \dfrac{1}{n}$ et $v_n = 2 + \dfrac{1}{n}$.

II Suites adjacentes

Définition

Deux suites numériques (u_n) et (v_n) sont adjacentes signifie que :

- l'une est croissante et l'autre est décroissante ;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$.

Exemple 1 : $u_n = 2 - \dfrac{1}{n}$, $v_n = 2 + \dfrac{1}{n^2}$.

Propriété

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante alors pour tous entiers naturels n et p, $u_n \leqslant v_p$, en particulier $u_n \leqslant v_n$.

Démonstration :

□

Théorème

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante alors (u_n) et (v_n) convergent et ont la même limite l. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant l \leqslant v_n$.

Démonstration :

□

III Séries numériques

1. Définition

Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. On appelle **série** de terme général u_n la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

- S_n est appelée **somme partielle d'ordre n** de la série.
- Lorsque la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, sa limite $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ est appelée **somme de la série de terme général u_n.** On peut alors écrire

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Dans ce cas on dit que la série est convergente, sinon elle est divergente.

Remarques :

- L'écriture $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ n'a de sens que si la série est convergente.
- L'écriture $\sum u_n$ désigne la série de terme général u_n avec $n\in\mathbb{N}$, $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$, celle de la série de terme général u_n avec $n \geqslant n_0$ c'est à dire la suite $(S_n)_{n\geqslant n_0}$.

Exemples 1 :

- (u_n) est la suite définie par $u_n = n$. La série $\sum u_n$ correspond à la suite (S_n) où

- Série géométrique : la série de terme général a^n est convergente si, et seulement si, $|a| < 1$.

  - Si $a = 1$
  - Si $a \neq 1$

    * si $|a| < 1$

    * si $|a| > 1$

2. Condition nécessaire de convergence

Théorème

Si la série $\sum u_n$ converge alors la suite (u_n) converge vers 0.

Démonstration :

$\square$

Remarques :

- On dira qu'une série diverge grossièrement si son terme général ne tend pas vers 0.
- ⚠ On peut avoir $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ mais la série qui diverge. Voir exercice 12.

3. Opérations : somme et multiplication par un réel

Théorème

- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont des séries convergentes alors $\sum(u_n+v_n)$ est une série convergente et
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n+v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$
- Si $\sum u_n$ est une série convergente alors $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\sum \lambda u_n$ est une série convergente et
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Démonstration :

$\square$

Remarques :

- Si $\sum(u_n + v_n)$ et $\sum u_n$ convergent alors $\sum v_n$ converge aussi. Effectivement,
- Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries, si l'une converge et l'autre diverge alors $\sum(u_n + v_n)$ diverge.
- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent alors on ne peut rien dire sur la nature de $\sum(u_n + v_n)$. Par exemple,

4. Séries télescopiques

Définition — séries télescopiques

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On appelle **série télescopique** associée à cette suite la série de terme général

$$u_n = v_{n+1} - v_n.$$

Proposition

Soit (v_n) une suite et u_n, $n \in \mathbb{N}$, le terme général de la série télescopique associée à (v_n).

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} (v_{k+1} - v_k) = v_{n+1} - v_0.$$

La série télescopique $\sum(v_{n+1} - v_n)$ et la suite (v_n) sont de même nature et lorsque (v_n) converge

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n) = \lim_{n\to+\infty} v_n - v_0.$$

Exemple 2 : Déterminons la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}$.

5. Séries à termes positifs

Définition

La série $\sum u_n$ est dite à termes positifs lorsque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$.

Théorème

Si $\sum u_n$ est une série à termes positifs et que (S_n) est la suite des sommes partielles,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k, \; n \in \mathbb{N},$$

alors

- la suite (S_n) est croissante ;
- $\sum u_n$ converge si, et seulement si, (S_n) est majorée ;
- si (S_n) n'est pas majorée alors $\sum u_n$ diverge et $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

Démonstration :

$\square$

Théorème — comparaison des séries à termes positifs

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n$.

- Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge ;
- si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.

Démonstration :

$\square$

Exemple 3 : Montrons que $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente.

6. Séries à termes quelconques

(a) Convergence absolue

Définition

La série $\sum u_n$ est dite **absolument convergente** lorsque la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Exemple 4 : Montrons que la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n^2}$ est absolument convergente.

Théorème

Si une série est absolument convergente alors elle est convergente.

Démonstration :

□

(b) Exemple des séries alternées

Définition

On dit qu'une série $\sum u_n$ est alternée lorsque son terme général u_n, $n \in \mathbb{N}$, peut s'écrire pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = (-1)^n \, a_n$$

où (a_n) est une suite de réels dont **le signe est constant.**

Exemple 5 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $u_n = \dfrac{\cos(n\pi)}{n^2}$. La série de terme général u_n est alternée. Effectivement,

Théorème

Soit une série de terme général $(-1)^n \, a_n$ avec $a_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Si :
- la suite (a_n) est décroissante ;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$,

alors $\sum (-1)^n \, a_n$ est convergente.

Démonstration :

□

Valeurs absolues

1

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Démontrer l'inégalité triangulaire :

$$|x+y| \leqslant |x|+|y|.$$

2. En déduire la deuxième inégalité triangulaire :

$$\big||x|-|y|\big| \leqslant |x-y|.$$

2

Résoudre l'équation

$$|3x-2|+|5-x| = |x+3|+2.$$

3

Démontrer que pour tous réels x et y :

1. $|x|+|y| \leqslant |x+y|+|x-y|$.

2. $1+|xy-1| \leqslant (1+|x-1|)(1+|y-1|)$.

Limites et suites

4

Montrer que si une suite (u_n) admet une limite ℓ alors cette limite est unique.

5

Soit φ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\varphi(n) \geqslant n.$$

2. Soit ℓ un réel, (u_n) une suite qui converge vers ℓ et $(u_{\varphi(n)})$ une suite extraite de (u_n). Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = \ell.$$

6

Montrer que si une suite (u_n) est convergente de limite ℓ alors la suite $(|u_n|)$ est convergente de limite $|\ell|$.

7

1. Que peut-on dire d'une suite d'entiers convergente ?

2. La partie entière d'un réel x est égale au plus grand entier inférieur ou égal à x.
Si on note $\lfloor x \rfloor$ cet entier alors

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Si la suite (u_n) est convergente de limite ℓ avec $\ell \in \mathbb{N}$, que peut-on dire de la suite $(\lfloor u_n \rfloor)$?

8

Moyenne de Césaro

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$v_n = \frac{u_1+u_2+\ldots+u_n}{n}.$$

1. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

2. Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Suites adjacentes

9

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

sont adjacentes.

10

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{nn!}$$

sont adjacentes.

2. Soit e la limite de ces deux suites.
On se propose de démontrer que e est irrationnel à l'aide d'un raisonnement par l'absurde (irrationnel signifie que e n'est pas égal à un quotient d'entiers).
On suppose que $e = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$.
Démontrer que :

$$q!u_q < p(q-1)! < q!u_q + 1.$$

En déduire une contradiction.

11

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$ et (u_n) et (v_n) les deux suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_0 = a,\ v_0 = b,\ u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}, v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}v_n}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \geqslant 0 \ \text{ et } \ v_n \geqslant 0.$$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \leqslant v_n.$$

3. Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

4. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(v_n - u_n).$$

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n - u_n \leqslant \frac{1}{2^n}(b-a).$$

(c) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

5. Soit α l'unique réel $\alpha \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\cos(\alpha) = \frac{a}{b}$.

(a) Calculer u_1, v_1, u_2 et v_2 en fonction de α.
Conjecturer des expressions de u_n et v_n en fonction de n et α que l'on démontrera par récurrence.

(b) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{4}\right)\ldots\cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) = \frac{\sin(\alpha)}{2^n \sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}.$$

(c) En déduire la limite commune des suites (u_n) et (v_n).

Séries

12

Divergence de la série harmonique

On considère la série harmonique, c'est à dire la série de terme général $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, et on note (S_n) la suite de ses sommes partielles.

1. Si l'on suppose que la série harmonique converge et a pour somme S que peut-on dire de la limite de la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$S_{2n} - S_n?$$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_{2n} - S_n \geqslant \frac{1}{2}.$$

3. Conclure.

13

Prérequis

La fonction exponentielle et les croissances comparées à la question **4.**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit sur $]-1;1[$ la fonction f_n par

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k.$$

1. Donner une expression simple de $f_n(x)$.

2. Déterminer, pour tout $x \in]-1;1[$, l'expression de $f_n'(x)$.

3. En déduire la somme :

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}.$$

4. En étudiant $\lim_{n\to+\infty} f_n'(x)$, montrer que, pour tout $x \in]-1;1[$, la série de terme général nx^{n-1}, $n \in \mathbb{N}^*$ est convergente et déterminer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}.$$

14

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

2. En déduire

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n(n+1)}.$$

3. Montrer que la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)},\ n \in \mathbb{N}^*,$$

est convergente et calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n.$$

15

En remarquant que, pour tout $n \geqslant 2$,

$$\frac{2}{n^2-1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$$

calculer

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1}$$

et étudier la convergence de la série de terme général

$$\frac{1}{n^2-1},\ n \geqslant 2.$$

16

En remarquant que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n = (n+1) - 1$ calculer

$$\sum_{k=1}^{n} kk!.$$

17

En remarquant que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n = (n+1) - 1$ calculer

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$$

et étudier la convergence de la série de terme général

$$\frac{n}{(n+1)!},\ n \in \mathbb{N}^*.$$

18

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $\sum u_n$ la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)\ldots(n+p)},\ n \in \mathbb{N}^*.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{n(n+1)(n+2)\ldots(n+p-1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+p)}\right).$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donner une expression simple de $\sum_{k=1}^{n} u_k$.

3. En déduire que $\sum u_n$ est convergente et déterminer $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

19

Convergence de $\sum \frac{1}{n^2}$.

Cette série va nous servir de référence pour établir, à l'aide du théorème de comparaison, la convergence de nombreuses autres série.

1. Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$,

$$0 \leqslant \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{(n-1)\,n}.$$

2. En déduire que $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente.

20

Prérequis

- La fonction exponentielle et les croissances comparées ;
- l'exercice 19.

On considère la série de terme général $\frac{\mathrm{e}^{-n}}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer qu'il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$,

$$0 \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-n}}{n} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

(on pourra commencer par déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2 \times \frac{\mathrm{e}^{-n}}{n}\right)$).

2. En déduire que $\sum \frac{\mathrm{e}^{-n}}{n}$ est convergente.

21

Prérequis

- La fonction $\ln$;
- l'exercice 19.

On considère la série de terme général $\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer qu'il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$,

$$0 \leqslant \ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right) \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

2. En déduire que $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)$ est convergente.

22

Prérequis

l'exercice 19.

Objectif : établir que $\sum \frac{a^n}{n!}$, $a \in \mathbb{R}$ est absolument convergente.

1. Soit a un nombre réel et k un entier strictement supérieur à $|a|$.

(a) Montrer par récurrence sur n que, pour tout entier n supérieur ou égal à k,

$$\frac{k^n}{n!} \leqslant \frac{k^k}{k!}.$$

(b) En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à k,

$$\frac{|a|^n}{n!} \leqslant \left(\frac{|a|}{k}\right)^n \frac{k^k}{k!}.$$

(c) Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a|^n}{n!} = 0.$$

2. En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\frac{|a|^n}{n!} = 0$$

puis que

$$\sum \frac{a^n}{n!}$$

est absolument convergente.

23

Prérequis

À la question **2**, la connaissance des fonctions exponentielles de base a (et donc de la fonction $\ln$) est requise.

Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

1. $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

2. a et b sont des réels fixés et $u_n = (-1)^n \frac{n^a}{(n+1)^b}$, $n \in \mathbb{N}$.

3. $u_n = \frac{(-1)^n}{v_n}$ où (v_n) est la suite définie par $v_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} = \sqrt{v_n^2 + \frac{1}{n}}$ (on pourra utiliser le résultat de l'exercice 12)

4. $u_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$ (on pourra commencer par montrer que $\sqrt{n^2+1} = n + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$).

24

Soit (u_n) une suite positive et décroissante telle que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

D'après le théorème de convergence des séries alternées, $\sum (-1)^n u_n$ est convergente. On note S le réel tel que

$$\mathrm{S} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n,$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n la somme partielle d'ordre n.
On rappelle que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont deux suites adjacentes.

1. Soit R_n le reste d'ordre n :

$$\mathrm{R}_n = \mathrm{S} - \mathrm{S}_n.$$

Montrer que

$$|\mathrm{R}_n| \leqslant u_{n+1}.$$

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, R_n a le même signe que $(-1)^{n+1} u_{n+1}$, le premier terme négligé lorsqu'on approche S par S_n.

3. Justifier que la série de terme général

$$\frac{(-1)^{n-1}}{n^3},\ n \in \mathbb{N},$$

converge et calculer sa somme à 10^{-3} près.

Polynômes

I Premières définitions

1. Définition

Définition

Une fonction $\mathrm{P} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un polynôme lorsqu'il existe un entier naturel n et $n+1$ réels $a_0, \ldots, a_n$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{P}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n.$$

- Les nombres a_k, $0 \leqslant k \leqslant n$, sont appelés les coefficients de P ;
- on note $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$.

Remarque :

- **Notation :** si $k \in \mathbb{N}^*$, on note X^k la fonction polynôme $x \mapsto x^k$.
  Le polynôme $\mathrm{P} : x \mapsto a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ se note donc plus simplement
  $$\mathrm{P} = \mathrm{P}(\mathrm{X}) = a_0 + a_1 \mathrm{X} + \ldots + a_n \mathrm{X}^n = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k.$$
- **Polynômes particuliers :**
  - Si les coefficients a_k, $0 \leqslant k \leqslant n$, sont nuls alors on obtient la fonction nulle qu'on appelle aussi polynôme nul et que l'on note 0 ou $0_{\mathbb{R}[\mathrm{X}]}$.
  - Les polynômes constants sont les polynômes de la forme $\mathrm{P} = a$ où $a \in \mathbb{R}$.
  - Un polynôme n'ayant qu'un seul (resp. deux, resp. trois) coefficient(s) non nul(s) est appelé monôme (resp. binôme, resp. trinôme).

2. Caractérisation du polynôme nul

Si tous les coefficients d'un polynôme P sont nuls alors P est le polynôme nul. Mais réciproquement, si un polynôme P est nul, c'est à dire que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{P}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0$$

tous les coefficients sont-ils nuls ?

$\mathrm{P}(x) =$ ______________________________

$\mathrm{P}'(x) =$ ______________________________

$P''(x) =$ ______

$P^{(i)}(x) =$ ______

$P^{(n)}(x) =$ ______

Proposition

- Si un polynôme est nul alors tous ses coefficients sont nuls :

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = 0 \Longrightarrow a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0.$$

- Les coefficients d'un polynôme sont définis de façon unique, c'est à dire,

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k \Longrightarrow a_0 = b_0,\ a_1 = b_1, \ldots,\ a_n = b_n.$$

Démonstration : ______

□

3. Degré d'un polynôme

Définition

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme.

- Si P n'est pas le polynôme nul, on appelle degré de P le plus grand entier k, $0 \leqslant k \leqslant n$, tel que $a_k \neq 0$.
- Si P est le polynôme nul, par convention, son degré est $-\infty$.

On note $\deg(P)$ le degré d'un polynôme.

Remarque : ⚠ Écrire $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ signifie seulement que $\deg(P) \leqslant n$. Par exemple,

$P = \sum_{k=0}^{5} \frac{1+(-1)^k}{2} X^k$ ______

Définition

- On appelle **coefficient dominant** d'un polynôme non nul le coefficient du terme de plus haut degré.
- Un polynôme est dit **unitaire** si son coefficient dominant est égal à 1.

Exemple 1 :

$\deg\left(5X^4 + 8X - 2\right) =$ ______

$\deg(12) =$ ______

$\deg(0) =$ ______.

Remarque : ______________________________

Notation : On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur à n.

4. Opérations sur les polynômes

Proposition

La somme, le produit et la composée de deux fonctions polynomiales est une fonction polynomiale.

Remarque : Si f et g sont deux fonctions polynomiales telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \neq 0$, on sait diviser f par g pour obtenir $\frac{f}{g} : x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$. Mais le résultat obtenu n'est pas forcément un polynôme.

Propriété

Soient $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{p} a_k \mathrm{X}^k$ et $\mathrm{Q} = \sum_{k=0}^{q} b_k \mathrm{X}^k$ deux polynômes de degrés respectifs p et q.

- Somme : $\mathrm{P}+\mathrm{Q} = \sum_{k=0}^{\max(p,q)} (a_k + b_k)\mathrm{X}^k$.
- Produit de P par $\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda \mathrm{P} = \sum_{k=0}^{p} \lambda a_k \mathrm{X}^k$.
- Produit de P et Q : $\mathrm{PQ} =$ ______________________________

Exemple 2 : Soient $\mathrm{P} = \mathrm{X}^2 - 5\mathrm{X} + 2$ et $\mathrm{Q} = 2\mathrm{X}^5 - \mathrm{X}^3 + 1$.

$\mathrm{P}+\mathrm{Q} =$ ______________________________

PQ : ______________________________

Proposition

Soient P et Q deux polynômes.

- $\deg(\mathrm{P}+\mathrm{Q}) \leqslant \max(\deg(\mathrm{P}), \deg \mathrm{Q})$.

  En particulier, $\deg(\mathrm{P}+\mathrm{Q}) = \max(\deg(\mathrm{P}), \deg \mathrm{Q})$ lorsque $\deg(\mathrm{P}) \neq \deg(\mathrm{Q})$ ou lorsque la somme des coefficients dominants de P et Q est non nulle.
- $\deg(\mathrm{PQ}) = \deg(\mathrm{P}) + \deg(\mathrm{Q})$.

  Si P et Q sont non nuls, le coefficient dominant de PQ est égal au produit des coefficients dominants de P et Q.

Exemple 3 : Soient $P = 2X^3 - X + 1$ et $Q = -2X^3 + X + 2$. $\deg(P) = \deg(Q) =$ ____________

mais $\deg(P+Q) =$ ____

Démonstration : Soient $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$ deux polynômes.

- Montrons que $\deg(P+Q) \leqslant \max\left(\deg(P), \deg Q\right)$.
  - Si $P \neq 0$ et $Q \neq 0$ de degrés respectifs p et q.
  - Si $P = 0$ ou $Q = 0$

$$\deg(P+Q) = \begin{cases} \_\_\_\_\_\_\_\_ & \text{si } P = 0 \text{ et } Q = 0 \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ & \text{si } P \neq 0 \text{ et } Q = 0 \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ & \text{si } P = 0 \text{ et } Q \neq 0 \end{cases}$$

- Montrons que $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.
  - Si $P \neq 0$ et $Q \neq 0$ de degrés respectifs p et q.
  - Si $P = 0$ ou $Q = 0$.

$$\deg(PQ) = \begin{cases} \_\_\_\_\_\_\_\_ & \text{si } P = 0 \text{ et } Q = 0 \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ & \text{si } P \neq 0 \text{ et } Q = 0 \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ & \text{si } P = 0 \text{ et } Q \neq 0 \end{cases}$$

□

Proposition admise

Soient P et Q deux polynômes.
$\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$ où $P \circ Q$ est le polynôme défini par $P \circ Q(X) = P\big(Q(X)\big)$.

Proposition

Soient P et Q deux polynômes, si P et Q sont non nuls alors PQ est non nul.
En d'autres termes (contraposée), si PQ est nul alors P ou Q est nul

Démonstration :

□

Remarque : Si f et g sont des fonctions on peut avoir $f \neq 0$, $g \neq 0$ et $fg = 0$.

Proposition

Soient P et Q deux polynômes. Si $PQ = 1$ alors P et Q sont des constantes non nulles et l'une est l'inverse de l'autre.

Démonstration :

□

Remarque :

Cette proposition prouve comme on l'a déjà dit qu'on ne peut diviser un polynôme P par un polynôme Q pour obtenir un autre polynôme, sauf si Q est une constante. Effectivement, si $\dfrac{P}{Q} = P \times \dfrac{1}{Q}$ est un polynôme alors $\dfrac{1}{Q}$ est un polynôme tel que $\dfrac{1}{Q} \times Q = 1$, c'est à dire $Q = \text{constante}$.
On résumera cette situation en disant que $\mathbb{R}[X]$, l'ensemble des polynômes, est un **anneau** (c'est à dire qu'on peut effectuer l'addition et la multiplication) mais pas un **corps** (ce qui voudrait dire qu'on pourrait en plus effectuer la division). On peut rapprocher cette situation de $\mathbb{Z}$ où l'on peut effectuer l'addition et la multiplication mais pas la division. En effet, la division de 19 par 3 est $\dfrac{19}{3}$ qui appartient à $\mathbb{Q}$ mais pas à $\mathbb{Z}$. Il faut comprendre que, lorsqu'on apprend la division à l'école, il s'agit de la division euclidienne.
Par exemple, avec 19 et 3, on a :

$$\begin{array}{r|l} 19 & 3 \\ \cline{2-2} 1 & 6 \end{array}$$

et la division est ici un algorithme qui permet de connaître le nombre maximum de paquets de 3 objets que l'on peut extraire d'un groupe de 19 objets.
Ce principe peut être étendu aux polynômes.

II Division euclidienne des polynômes

Théorème

Soient A et B deux polynômes, avec $B \neq 0$. Il existe un unique couple de polynômes (P, Q) tel que

$$A = BQ + R \quad \text{et } \deg(R) < \deg(B).$$

Exemple 1 : mise œuvre de la division euclidienne
On considère les polynômes $A = 3X^4 + 2X^3 + X^2 + X$ et $B = X^2 + 3X + 2$.

Définition — divisibilité

Soient A et B deux polynômes. On dit que B divise A (ou que A est divisible par B ou que A est un multiple de B) lorsqu'il existe un polynôme Q tel que $A = BQ$.
On note $B \mid A$.

Exemple 2 :

Définition

On dit qu'un polynôme non constant $P \in \mathbb{R}[X]$ est **irréductible** dans $\mathbb{R}[X]$ si les seuls diviseurs de P sont les polynômes constants (et non nuls) et les polynômes de la formes λP où $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Exemple 3 : $P = 2$, $Q = X - 3$, $R = X^2 + 1$ sont des polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

III Racines d'un polynôme

1. Définition

Définition

Soit P un polynôme et α un réel.
On dit que α est **racine** du polynôme P lorsque $P(\alpha) = 0$.

Exemple 1 : Le polynôme $P = 3X^2 - 3X - 6$ a pour racines -1 et 2. Effectivement

Proposition

Soit P un polynôme et α un réel.
α est racine de P si, et seulement si, $X - \alpha$ divise P.

Démonstration : Effectuons la division euclidienne de P par $X - \alpha$.

□

Proposition

Soit P un polynôme et $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ p réels **distincts**.
$\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont des racines distinctes de P si, et seulement si, $\prod_{k=1}^{p} (X - \alpha_k)$ divise P.

Corollaire

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

- Si P a plus de n racines distinctes alors P est le polynôme nul.
- Si $\deg(P) = n$, alors P a, au plus, n racines distinctes.

Démonstration :

$\square$

Remarque : Cette proposition peut être utilisée pour montrer que deux polynômes P et Q de $\mathbb{R}_n[X]$ sont égaux : si il existe $n+1$ réels distincts $\alpha_0, \dots, \alpha_n$, tels que $P(\alpha_k) = Q(\alpha_k)$, $0 \leqslant k \leqslant n$, alors $P = Q$.

2. Racines multiples

Définition

Soit P un polynôme et k un entier naturel non nul. On dit que $\alpha \in \mathbb{R}$ est une **racine d'ordre k** lorsqu'il existe un polynôme Q tel que $P = (X-\alpha)^k Q$ et $Q(\alpha) \neq 0$.

- k est appelé l'ordre de multiplicité de la racine α.
- Une racine d'ordre 1 (resp. 2, 3) est appelée racine simple (resp. racine double, racine triple).
- On dit que α est une racine multiple si son ordre de multiplicité est supérieur à 2.

Remarque : Si α est une racine d'ordre d'ordre k de P alors

Exemple 2 :

- 2 est une racine double de $X^3 - X^2 - 8X + 12$,
- Si $P = aX^2 + bX + c$ est un trinôme du second degré, alors

Théorème — caractérisation des racines multiples

Soient P un polynôme, α un réel et k un entier naturel non nul.
α est racine de P d'ordre k si, et seulement si

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(k)}(\alpha) \neq 0.$$

Exemple 3 : Soit $P = X^3 - X^2 - 8X + 12$.

La démonstration du théorème sur la caractérisation des racines multiples fait appel à la **formule de Taylor** qui est présentée dans le théorème ci-dessous.

Théorème — **formule de Taylor pour les polynômes**

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} P &= P(a) + P'(a)(X-a) + \frac{P''(a)}{2!}(X-a)^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k \end{aligned}$$

Démonstration : Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$.

- Si $a = 0$:

- Si a est quelconque :

$\square$

Démonstration : (caractérisation des racines multiples)

Degré d'un polynôme - opérations

1

Déterminer le degré et le coefficient dominant des polynômes suivants :

1. $(X+1)(3X-2)^2(3-X)^3$;

2. $(X-2)^3-(X+3)^3+15(X+1)^2$;

3. $(X-2)^n-(X+5)^n,\ \ n\in\mathbb{N}^*$;

4. $\prod_{k=0}^{n}(2X-k),\ \ n\in\mathbb{N}$.

2

En raisonnant sur le degré, déterminer l'ensemble des polynômes tels que

$$P\left(X^2\right)=\left(X^2+1\right)P(X).$$

3

Soit $n\in\mathbb{N}$, montrer qu'il existe un unique polynôme $P\in\mathbb{R}_n[X]$ tel que $P-P'=X^n$.

4

Soit $P\in\mathbb{R}_n[X]$, montrer que le polynôme Q tel que

$$Q=nXP-X^2P'$$

appartient à $\mathbb{R}_n[X]$.

Division euclidienne

5

Effectuer la division euclidienne de :

1. $3X^5-X^3+2X^2+4$ par X^2+1

2. $X^4-X^3+3X^2+X+1$ par X^3-1

6

Apprendre une méthode

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $A=(x-2)^{2n}+x-3$.

1. Soit $B_1=(X-1)(X-3)$ et R le reste de la division euclidienne de A par B_1.

(a) Montrer que $\deg(R)<2$.

(b) En déduire que R est de la forme $aX+b,\ \ (a,b)\in\mathbb{R}^2$.

(c) En évaluant A en 1 et en 3 montrer que a et b vérifient le système :

$$\begin{cases}-a+b=-3\\3a+b=1\end{cases}$$

puis en déduire R.

2. Soit $B_2=(X-1)^2(X+2)$ et $(Q,R)\in\mathbb{R}[X]^2$ l'unique couple tel que $A=B_2Q+R$ et $\deg(R)<\deg(B_2)$.

(a) Montrer que $\deg(R)<3$ et en déduire que R est de la forme $aX^2+bX+c,\ \ (a,b,c)\in\mathbb{R}^3$.

(b) En utilisant l'expression $A=B_2Q+R$ ainsi que celle de A' montrer que a, b et c sont solutions du système :

$$\begin{cases}a+b+c=-1\\4a-2b+c=16^n-5\\2a+b=-2n+1\end{cases}$$

(c) En déduire R.

3. Soit $B_3=(X-1)^3$. Déterminer le reste de la division euclidienne de A par B_3.

7

Prérequis

Les nombres complexes

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Déterminer le reste de la division euclidienne de A par B lorsque $A=X^{2n}+2X^n+1$ et $B=X^2+1$.

Racines d'un polynôme

8

Soit $P=X^4-9X^3+30X^2-44X+24$.

1. Montrer que 2 est racine de P.

2. Donner son ordre de multiplicité.

3. Factoriser P.

9

Déterminer l'ordre de multiplicité de la racine 1 de

$$X^{n+1}-(n+1)X+n.$$

10

Montrer que pour tout $n\geqslant 4$,

$$P_n=nX^{n+2}-(n+2)X^{n+1}+(n+2)X-n$$

est divisible par $(X-1)^3$.

11

Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et $P=X^3-aX+b$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur (a,b) pour que P soit divisible par $(X-1)^2$.

12

Montrer que si un polynôme P vérifie $P(X+1)=P(X)$ et admet une racine alors $P=0$.

13

Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, le polynôme $P_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{X^k}{k!}$ ne peut qu'avoir des racines simples.

14

Soit $n \geqslant 2$ et $P_n = (X+1)^n - X^n - 1$.

1. **(a)** Exprimer P_n à l'aide des coefficients binômiaux $\binom{n}{k}$.

(b) En déduire le degré de P_n ainsi que son coefficient dominant.

(c) Montrer que X divise P_n.

2. **(a)** Déterminer les valeurs de n pour lesquelles P_n est divisible par $X+1$.

(b) Le polynôme P_n peut-il être divisible par $(X+1)^2$?

15

On considère la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes définis par

$$\begin{cases} P_0 = 1,\ P_1 = X \\ \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n \end{cases}$$

1. Déterminer les polynômes P_2 et P_3.

2. **(a)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré du polynôme P_n.

(b) Conjecturer une expression du coefficient dominant en fonction de $n \in \mathbb{N}$, puis démontrer cette conjecture à l'aide d'une récurrence.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $P_n\big(\cos(\theta)\big) = \cos(n\theta)$.

4. **(a)** Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, résoudre dans $[0;\pi]$ l'équation $\cos(nx) = 0$ et donner le nombre de solutions.

(b) En déduire les racines de P_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

(c) Montrer que toutes les racines appartiennent à l'intervalle $]-1;1[$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en déduire une factorisation de P_n.

6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = (-1)^n \frac{1}{2^{n-1}} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

7. **(a)** Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\sin(\theta)\, P_n'\big(\cos(\theta)\big) = n \sin(n\theta).$$

(b) En faisant tendre θ vers 0, en déduire $P_n'(1)$.

Chapitre 4

Limites et continuité

Remarques préliminaire :

- Dans ce chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non-vide et non réduit à un point.
- L'intérieur de I est l'intervalle **ouvert** de mêmes bornes que I (finies ou infinies).

I Limite d'une fonction

1. Limite en un point

Définition

Soit f une fonction définie sur I et x_0 un point de I ou une extrémité de I.
On dit que f admet une limite finie ℓ en x_0 si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in \mathrm{I},\ |x - x_0| \leqslant \alpha \Longrightarrow \left|f(x) - \ell\right| \leqslant \varepsilon.$$

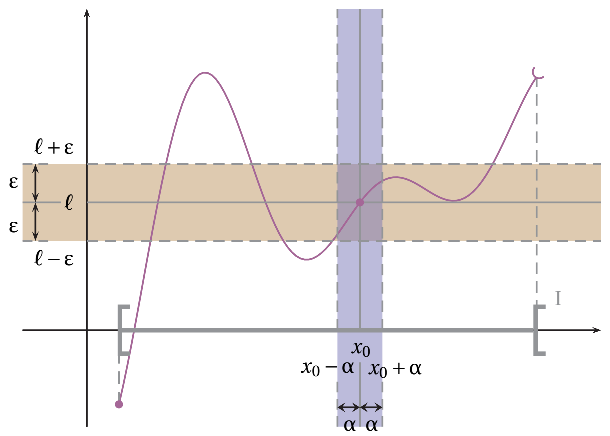
On note $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{x_0} f(x) = \ell$ ou $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell$.

Remarque :

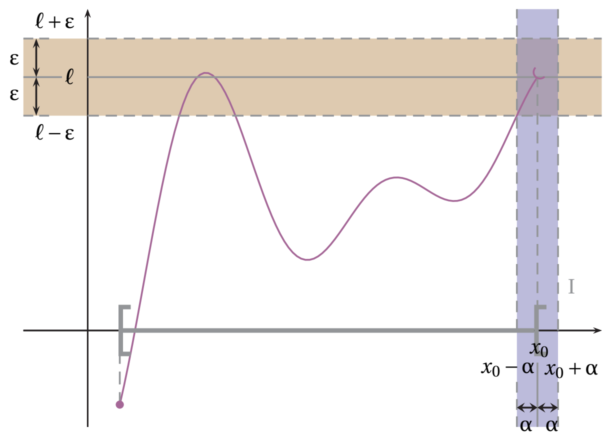
- Une autre formulation couramment employée est
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in \mathrm{I} \cap [x_0 - \alpha ; x_0 + \alpha],\ \left|f(x) - \ell\right| \leqslant \varepsilon.$$
- Il faut garder en tête que $\left|f(x) - \ell\right| \leqslant \varepsilon$ est un encadrement de $f(x)$ et $|x - x_0| \leqslant \alpha$ un encadrement de x :
$$\left|f(x) - \ell\right| \leqslant \varepsilon \Longleftrightarrow \ell - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \ell + \varepsilon \quad \text{et} \quad |x - x_0| \leqslant \alpha \Longleftrightarrow x_0 - \alpha \leqslant x \leqslant x_0 + \alpha.$$

Illustration

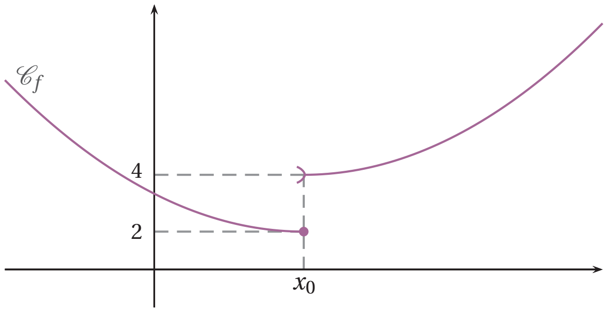
- $x_0 \in \mathrm{I}$

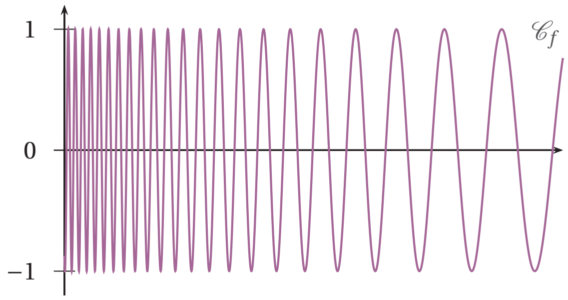


- $x_0 \notin \mathrm{I}$ (x_0 est une borne)



Exemple 1 : Fonctions qui ne possèdent pas de limite en x_0.





Théorème — *unicité de la limite*

Soit f une fonction définie sur I et x_0 un point de I ou une extrémité de I.

- Si f admet une limite ℓ en x_0 alors cette limite est unique.
- Si de plus $x_0 \in \mathrm{I}$ alors la limite de f en x_0 est nécessairement $f(x_0)$.

2. Limite à droite, limite à gauche

Définition — *limite à droite, à gauche*

Soient x_0 un point de I et f une fonction dont l'ensemble de définition contient $\mathrm{I}\setminus\{x_0\}$.

- Si x_0 n'est pas l'extrémité gauche de I, on dit que ℓ est la limite à gauche de f en x_0 si la restriction de f à $\mathrm{I}\cap]-\infty; x_0[$ admet ℓ pour limite en x_0.

  On note $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{x_0^-} f(x) = \ell$ ou $f(x) \underset{x\to x_0^-}{\longrightarrow} \ell$.

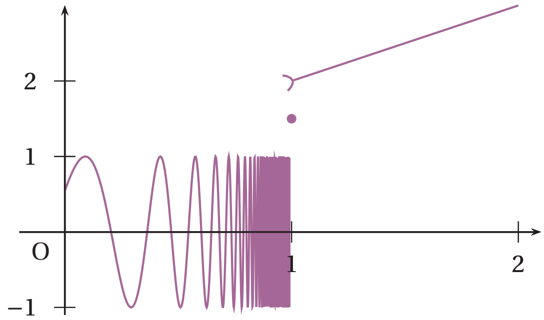
- Si x_0 n'est pas l'extrémité droite de I, on dit que ℓ est la limite à droite de f en x_0 si la restriction de f à $\mathrm{I}\cap]x_0; +\infty[$ admet ℓ pour limite en x_0.

  On note $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x_0<x}} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{x_0^+} f(x) = \ell$ ou $f(x) \underset{x\to x_0^+}{\longrightarrow} \ell$.

Remarque : On a les équivalences suivantes :

- si x_0 n'est pas l'extrémité gauche de I,
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in \mathrm{I},\ -\alpha \leqslant x - x_0 < 0 \Longrightarrow \left|f(x) - \ell\right| \leqslant \varepsilon$$
- si x_0 n'est pas l'extrémité droite de I,
$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in \mathrm{I},\ 0 < x - x_0 \leqslant \alpha \Longrightarrow \left|f(x) - \ell\right| \leqslant \varepsilon$$

Exemple 2 :

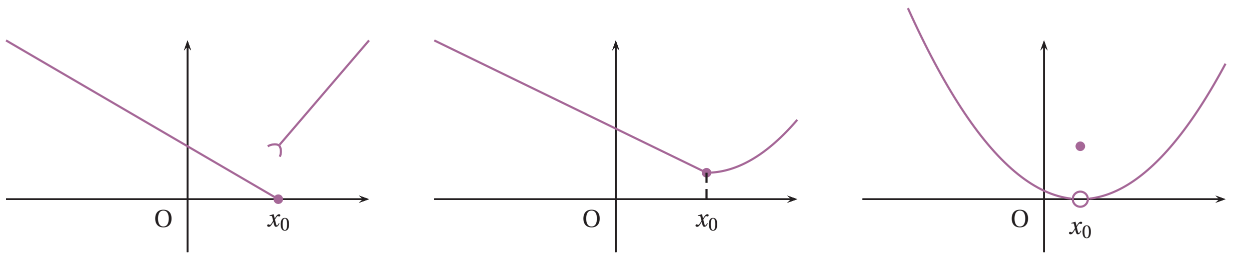


Propriété

Soit x_0 un point intérieur à I et f une fonction définie sur I.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell \\ \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell \\ f(x_0) = \ell \end{cases}$$

Exemple 3 :



Définition — extension de la limite en un point

Soit x_0 un point intérieur à I et f une fonction définie sur $\mathrm{I} \setminus \{x_0\}$.
On dit que f admet pour limite ℓ en x_0 lorsqu'elle admet une limite à droite et une limite à gauche en x_0 et que ces deux limites sont égales à ℓ.

Exemple 4 :

- On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$. Étudions la limite au point $x_0 = 1$.

- On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3x^2 + 2\sqrt{x^2}}{x}$. Étudions les limites au point $x_0 = 0$.

3. Extension de la notion de limite

(a) Fonction tendant vers une limite finie à l'infini.

Définition

Soit f une fonction définie sur I.

- Si I est un intervalle non majoré, on dit que f admet ℓ pour limite quand x tend vers $+\infty$ lorsque
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \mathrm{A} \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathrm{I},\ x \geqslant \mathrm{A} \Longrightarrow \left| f(x) - \ell \right| \leqslant \varepsilon$$
- Si I est un intervalle non minoré, on dit que f admet ℓ pour limite quand x tend vers $-\infty$ lorsque
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \mathrm{A} \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathrm{I},\ x \leqslant \mathrm{A} \Longrightarrow \left| f(x) - \ell \right| \leqslant \varepsilon$$

(b) Fonction tendant vers l'infini quand x tend x_0

Définition

Soit x_0 un point de I ou une extrémité de I et f une fonction définie sur $\mathrm{I} \setminus \{x_0\}$.

- On dit que f admet $+\infty$ pour limite quand x tend vers x_0 lorsque
$$\forall \mathrm{A} > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in \mathrm{I} \setminus \{x_0\},\ |x - x_0| \leqslant \alpha \Longrightarrow f(x) \geqslant \mathrm{A}$$
- On dit que f admet $-\infty$ pour limite quand x tend vers x_0 lorsque
$$\forall \mathrm{A} > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in \mathrm{I} \setminus \{x_0\},\ |x - x_0| \leqslant \alpha \Longrightarrow f(x) \leqslant -\mathrm{A}$$

Remarque : On pourra considérer,

- si x_0 n'est pas l'extrémité gauche de I, la restriction de f à $\mathrm{I} \cap]-\infty ; x_0[$ et écrire $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$;
- si x_0 n'est pas l'extrémité droite de I, la restriction de f à $\mathrm{I} \cap]x_0 ; +\infty[$ et écrire $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$;

Exemple 5 : $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$.

(c) Divergence en l'infini

Définition

Soit f une fonction définie sur I.

- Si I est un intervalle non majoré, on dit que f tend vers $+\infty$ (resp. vers $-\infty$) quand x tend vers $+\infty$ lorsque
$$\forall A' > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x \geqslant A \Longrightarrow f(x) \geqslant A'$$
$$(\text{resp. } \forall A' > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x \geqslant A \Longrightarrow f(x) \leqslant -A')$$
- Si I est un intervalle non minoré, on dit que f tend vers $+\infty$ (resp. vers $-\infty$) quand x tend vers $-\infty$ lorsque
$$\forall A' > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x \leqslant A \Longrightarrow f(x) \geqslant A'$$
$$(\text{resp. } \forall A' > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x \leqslant A \Longrightarrow f(x) \leqslant -A')$$

4. Opérations sur les limites

Dans la suite, α désigne : $-\infty$, $+\infty$, un réel x_0, x_0^- ou x_0^+.
f et g sont deux fonctions, l et l' sont deux réels.

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	l	$l \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	$l' \neq 0$	0	0	$l' \neq 0$	$l' \neq 0$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} \big(f(x)+g(x)\big)$										
$\lim\limits_{x\to\alpha} \big(f(x)\times g(x)\big)$										
$\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(*)$										

$(*)$ Dans cette ligne on considère que, lorsque $g(x)$ tend vers 0, son signe reste constant.

Propriété

a, b et c représentent des réels, $-\infty$ ou $+\infty$. f et g sont des fonctions.
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x\to b} g(x) = c$ alors $\lim\limits_{x\to a} (g \circ f)(x) = c$.

Exemple 6 : $\lim\limits_{x\to+\infty} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Propriété

a et b représentent des réels, $-\infty$ ou $+\infty$. f est une fonction définie sur I et (u_n) est une suite dont tous les termes, à partir d'un certain rang, appartiennent à I.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = b$.

5. Théorèmes de comparaison

Théorème

- Cas d'une limite finie (théorème des gendarmes) :

  f, u et v sont trois fonctions, a représente un réel, $-\infty$ ou $+\infty$ et l est un nombre réel.

  Si
  - pour tout réel x voisin de a, $u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x)$
  - $\lim\limits_{x\to a} u(x) = l$
  - $\lim\limits_{x\to a} v(x) = l$

  alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.

- Cas d'une limite infinie

  f et u sont deux fonctions, a représente un réel, $-\infty$ ou $+\infty$

  Si
  - pour tout réel x voisin de a, $u(x) \leqslant f(x)$
  - $\lim\limits_{x\to a} u(x) = +\infty$

  alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.

  Si
  - pour tout réel x voisin de a, $f(x) \leqslant u(x)$
  - $\lim\limits_{x\to a} u(x) = -\infty$

  alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Exemple 7 : Soit $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \end{array}$. Déterminons $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

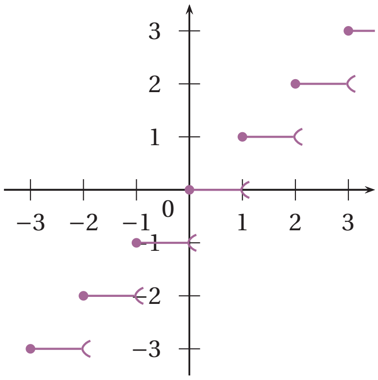
II Continuité

1. Continuité en un point

Définition

On dit qu'une fonction f, définie sur un intervalle I contenant x_0, est continue au point x_0 lorsque f admet une limite en x_0. On a alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Exemple 1 : La fonction partie entière. On considère la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$. On rappelle que $\lfloor x \rfloor$ est égal au plus grand entier inférieur ou égal à x, $\lfloor x \rfloor$ est donc l'entier tel que $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.



Étude de la continuité en un point entier n :

Définition

Soit f une fonction définie sur I et x_0 un point de I.

- Continuité à gauche

  Si x_0 n'est pas l'extrémité gauche de I, on dit que f est **continue à gauche** en x_0 si la restriction de f à $\mathrm{I} \cap]-\infty ; x_0]$ est continue en x_0.

  f est continue à gauche en x_0 équivaut à $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

- Continuité à droite

  Si x_0 n'est pas l'extrémité droite de I, on dit que f est **continue à droite** en x_0 si la restriction de f à $\mathrm{I} \cap [x_0 ; +\infty[$ est continue en x_0.

  f est continue à droite en x_0 équivaut à $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

Remarque : Il résulte de cette définition que f est continue à gauche et à droite au point x_0 si, et seulement si, f est continue au point x_0.

Exemple 2 : En tout point de $\mathbb{Z}$, la fonction partie entière est continue à droite mais pas à gauche.

2. Prolongement par continuité

Définition

Soit x_0 un point d'un intervalle I et f une fonction définie sur $\mathrm{I} \setminus \{x_0\}$ telle que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe et soit égale à ℓ.

On appelle prolongement par continuité de f au point x_0 la fonction $\widetilde{f}$ définie sur I par

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell & \text{si } x = x_0 \\ f(x) & \text{si } x \neq x_0 \end{cases}$$

La fonction $\widetilde{f}$ est continue en x_0.

Exemple 3 :

- On considère $f : x \mapsto x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

- Prolongement de la fonction $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ en 0 pour $\alpha > 0$ (prérequis : les fonctions $\ln$ et $\exp$).

3. Opérations sur les fonctions continues en un point

Propriété — opérations - composition

Soient f et g sont deux fonctions continue au point x_0 et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Les fonctions λf, $f+g$, et fg sont continues au point x_0. Il en est de même pour $\dfrac{f}{g}$ si $g(x_0) \neq 0$.
- Si f est continue au point x_0 et g continue au point $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est continue au point x_0.

III Continuité sur un intervalle

1. Définition, premières propriétés

Définition

On dit qu'une fonction f est continue sur un intervalle I si f est continue en tout point de I.
On note $\mathcal{C}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur l'intervalle I.

Propriété — Opérations

Soient f et g deux fonctions continues sur I, et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- λf, $f+g$ et fg sont continues sur I.
- Si g ne s'annule par sur I, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue sur I.

Propriété — Composition

Soit J un intervalle. Si f est une fonction continue sur I telle que $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$, et si g est une fonction continue sur J, alors $g \circ f$ est continue sur I.

Théorème — **Continuité des fonctions usuelles**

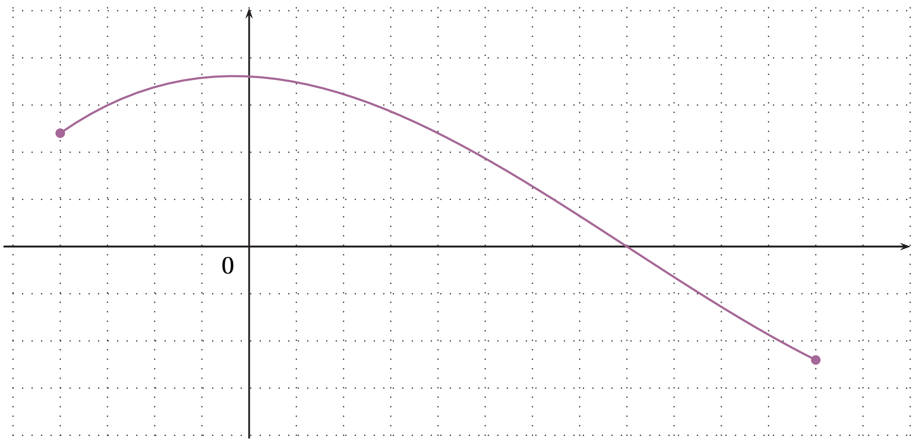
Les fonctions polynomiales, rationnelles, trigonométriques, logarithmes, exponentielles, ainsi que la fonction valeur absolue sont continues sur leur ensemble de définition.

Exemple 1 : Montrons que la fonction $f : x \mapsto \left(\tan(x)\right)^2$ est continue sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

2. Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.
Si f est une fonction continue sur $[a\,;b]$ alors pour toute valeur k comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe $c \in [a\,;b]$ tel que $k = f(c)$.



Remarque :

- ◻
- ◻

Démonstration : Supposons que $f(a) < f(b)$.
Soit $k \in [f(a) ; f(b)]$. Démontrer ce théorème revient à montrer que l'équation $k = f(x)$ admet une solution dans $[a ; b]$.
Pour prouver l'existence de cette solution nous allons procéder par dichotomie.
Considérons les deux suites (a_n) et (b_n) définie par $a_0 = a,\ b_0 = b$ et les relations de récurrences :

$$a_{n+1} = \begin{cases} \_\_\_\_\_\_\_\_ & \text{si } \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ & \text{sinon} \end{cases}, \quad b_{n+1} = \begin{cases} \_\_\_\_\_\_\_\_ & \text{si } \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Établissons que (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

- Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(a_n) \leqslant k \leqslant f(b_n)$.

- Conclusion :

$\square$

Corollaire

Si f est une fonction continue sur un intervalle I alors $f(\mathrm{I})$ est un intervalle

Démonstration : Rappelons la propriété caractéristique d'un intervalle :

$$\mathrm{I} \text{ est un intervalle de } \mathbb{R} \iff \left(\forall (a,b) \in \mathrm{I}^2,\ a \leqslant b \implies [a\,;b] \subset \mathrm{I}\right).$$

$\square$

Remarque :

- I et $f(\mathrm{I})$ ne sont pas forcément de même nature. On considère $f : x \mapsto x^2$ qui est continue sur $\mathbb{R}$.

- La fonction partie entière $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ n'est pas continue sur $\mathbb{R}$, $\lfloor \mathbb{R} \rfloor = \mathbb{Z}$ n'est pas un intervalle.

-

3. Image d'un segment par une fonction continue

Définition

Un segment est un intervalle de la forme $[a\,;b]$ où a et b sont des réels tels que $a \leqslant b$.

Théorème — admis

Si f est une fonction continue sur un segment $[a\,;b]$ alors $f\big([a\,;b]\big)$ est un segment. C'est à dire que f est bornée sur $[a\,;b]$ et atteint ses bornes.
En posant $m = \min\limits_{x\in[a\,;b]} \big(f(x)\big)$ et $\mathrm{M} = \max\limits_{x\in[a\,;b]} \big(f(x)\big)$ on a $f\big([a\,;b]\big) = [m\,;\mathrm{M}]$.

Exemple 2 : (contre-exemples)

- Cas où f n'est pas définie sur un segment. On considère la fonction f définie sur $]0\,;1]$ par $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

- Cas où f est définie sur un segment mais n'est pas continue sur celui-ci.

4. Fonction continue et bijective

Rappel(s)

- Si $f : \mathrm{I} \to \mathrm{J}$ est une bijection alors elle admet une fonction réciproque $f^{-1} : \mathrm{J} \to \mathrm{I}$ et
$$\forall x \in \mathrm{I},\ \forall y \in \mathrm{J},\ \ y = f(x) \iff x = f^{-1}(y),$$
- de plus $f\big(f^{-1}(y)\big) = y$ et $f^{-1}\big(f(x)\big) = x$.

Théorème

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I alors

- f réalise une bijection de I sur l'intervalle $f(\mathrm{I})$;
- f^{-1}, la bijection réciproque, est continue, strictement monotone et de même variation que f sur $f(\mathrm{I})$.

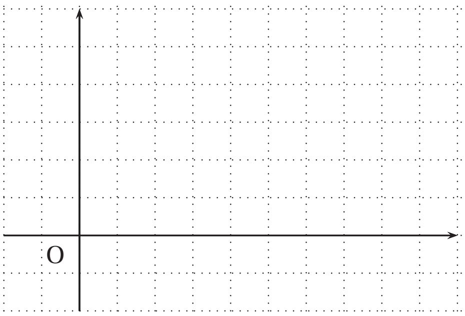
Démonstration : Supposons f strictement croissante sur I.

- Montrons que f est bijective.

- Montrons que f^{-1} est strictement croissante sur $f(\mathrm{I})$.

- Montrons que f^{-1} est continue sur $f(\mathrm{I})$.

Supposons que I est du type $]a\,;b[$, où, éventuellement, $a=-\infty$ et $b=+\infty$.



□

Proposition — **Intervalle image $f(I)$**

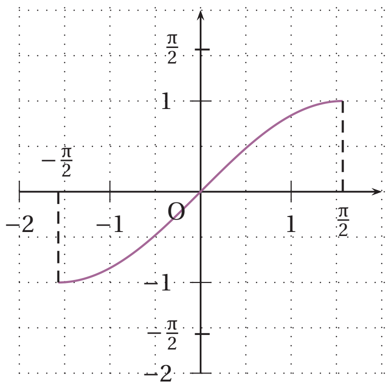
Soient a et b deux réels tels que $a < b$, et, éventuellement, $a = -\infty$ et $b = +\infty$.

I / f	$[a\,;\,b]$	$]a\,;\,b]$	$[a\,;\,b[$	$]a\,;\,b[$
f strictement croissante				
f strictement décroissante				

Exemple 3 :

- Soit $f : \;]-1\,;\,+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$

- Soit $f : \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(x)$



Définition de la limite

1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x-1| + |x|$.

1. Donner l'expression de $f(x)$ sans les valeurs absolues.

2. En utilisant la définition, démontrer que $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = 1$.

3. En utilisant la définition, démontrer que $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 1$.

4. En déduire la limite de f en 0.

2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \frac{-x+5}{x}.$$

1. Déterminer une condition suffisante du type $-10^{-n} \leqslant x \leqslant 0$, où $n \in \mathbb{N}$, pour que $f(x) \leqslant -10^5$.

2. Montrer en utilisant la définition que

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty.$$

3

Montrer en utilisant la définition que

$$f : x \mapsto \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$$

admet une limite ℓ en 0.

4

1. (a) Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et x_0 un réel tels que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x - x_0| \leqslant 5\varepsilon \implies \left|f(x) - 2\right| \leqslant \varepsilon$$

et

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x - x_0| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \implies \left|g(x) - 1\right| \leqslant \varepsilon$$

Trouver une condition suffisante du type $|x - x_0| \leqslant \alpha$ pour que $\left|f(x) + g(x) - 3\right| \leqslant 10^{-5}$.

(b) f et g étant deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ ayant respectivement au point x_0 les limites ℓ et ℓ', montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$ si,

$$\left|f(x) - \ell\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \left|g(x) - \ell'\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

alors

$$\left|f(x) + g(x) - \ell - \ell'\right| \leqslant \varepsilon.$$

En déduire que $f + g$ admet pour limite $\ell + \ell'$ en x_0.

2. Soit h une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \implies |h(x) - 5| \leqslant \varepsilon.$$

(a) Trouver un réel $m > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |x| \leqslant \frac{1}{3} \implies h(x) \geqslant m.$$

(b) Trouver un réel α strictement positif tel que $|x| \leqslant \alpha$ soit une condition suffisante pour avoir

$$\left|\frac{1}{h(x)} - \frac{1}{5}\right| \leqslant 10^{-4}.$$

Calculs de limites

5

Étudier la limite de la fonction f au point x_0 dans les cas suivants :

1. $f(x) = \dfrac{3x^3 - 3x^2 + 2x - 2}{x^2 + x - 2}$, $x_0 = 1$;

2. $f(x) = \dfrac{x^4 - 81}{-x^3 + 2x^2 + 2x + 3}$, $x_0 = 3$;

3. $f(x) = \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-4}}$, $x_0 = -2$;

4. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x^2-1}}$, $x_0 = 1$;

5. $f(x) = \dfrac{\left|3x^2 + 5x + 2\right|}{x+1}$, $x_0 = -1$;

6. $f(x) = \dfrac{x}{x + |x|}$, $x_0 = 0$;

7. $f(x) = \dfrac{\sin(x) - \cos(x)}{x - \frac{\pi}{4}}$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

6

Calculer en fonction du réel a la limite

$$\lim_{x \to a} \frac{\sin(ax) - \sin\left(x^2\right)}{a - x}.$$

7

Déterminer

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^3 + bx^2 + x + 1} - x\sqrt{x+1}$$

selon les valeurs de $b \in \mathbb{R}$.

d'après bac E, Reims 1978

Continuité en un point

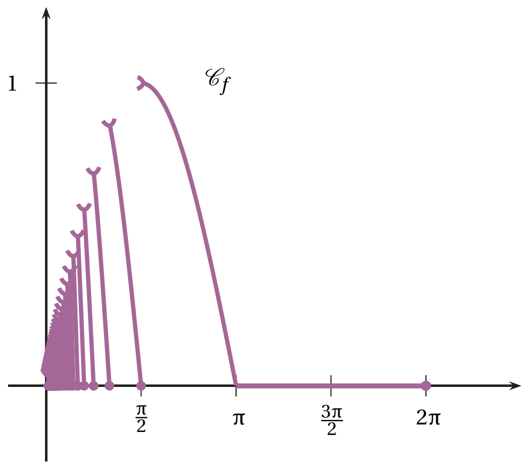
8

Soit f la fonction définie sur $[-1 ; 1]$ par

$$f(x) = |x| - \lfloor 1 - x \rfloor.$$

Étudier la continuité de f aux points -1, 0 et 1.

9



La fonction f représentée ci-dessus est définie par

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(x\left\lfloor \frac{\pi}{x} \right\rfloor\right) & \text{si } x \in]0;2\pi] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

où $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est la fonction partie entière, c'est à dire que $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.

1. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$t - 1 < \lfloor t \rfloor \leqslant t.$$

2. Déterminer la limite quand x tend vers 0 par valeurs supérieurs de la fonction définie sur $]0;2\pi]$ par

$$x \mapsto x\left\lfloor \frac{\pi}{x} \right\rfloor.$$

En déduire la continuité de f à l'origine.

3. **(a)** Résoudre dans $[0;2\pi]$ l'équation $\left\lfloor \frac{\pi}{x} \right\rfloor = 0$.

(b) Résoudre dans $[0;2\pi]$ l'équation $\left\lfloor \frac{\pi}{x} \right\rfloor = k$, où $k \in \mathbb{N}^*$.

(c) Donner l'expression de $f(x)$ sur les intervalles $\left]\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]$ et $\left]\frac{\pi}{2};\pi\right]$.

4. **(a)** Donner l'expression de $f(x)$ sur $\left]\frac{\pi}{k+1};\frac{\pi}{k}\right]$ où $k \in \mathbb{N}^*$.

(b) Faire l'étude de la continuité en tout point de l'intervalle $[0;2\pi]$.

5. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$y_k = \lim_{x \to \frac{\pi}{k}^+} f(x).$$

Montrer que le point $M_k\left(\frac{\pi}{k};y_k\right)$ appartient à une courbe dont on précisera l'équation.

10

Étudier la continuité de $f\colon [-1;2] \to \mathbb{R}$
$$x \mapsto (-1)^{\lfloor x \rfloor}\left(x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}.$$

Prolongement par continuité

11

Trouver $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ et déterminer un prolongement par continuité en x_0 de la fonction f dans les cas suivants :

1. $f\colon x \mapsto \dfrac{x^3 - x^2 - x - 2}{x-2}$, $x_0 = 2$.

2. $f\colon x \mapsto \dfrac{\sqrt{2x} - 2}{\sqrt{x+7} - 3}$, $x_0 = 2$.

12

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par

$$f(x) = x^2\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor.$$

1. Montrer que :

$$\forall x \in]0;+\infty[,\ x - x^2 \leqslant f(x) \leqslant x.$$

2. Peut-on prolonger f par continuité en 0 ?

Continuité sur un intervalle

13

Soit f une application continue de $[0;1]$ dans $[0;1]$ et g l'application définie sur $[0;1]$ par

$$g(x) = f(x) - x.$$

1. Donner le signe du produit $g(0)g(1)$.

2. En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans $[0;1]$.

14

Prérequis

les fonctions exponentielles et la fonction $\ln$.

Partie A

Soit F l'ensemble des applications f **continues** de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifient

$$\begin{cases} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y)f(x-y) = \left(f(x)f(y)\right)^2 \\ f(0) \geqslant 0 \end{cases}$$

1. Vérifier que la fonction $x \mapsto 2^{-x^2}$ appartient à F.

2. Montrer que si $f \in$ F alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

(a) $f(x)f(-x) = \left(f(0)f(x)\right)^2$;

(b) $\left(f(x)\right)^2 = \left(f(x)f(0)\right)^2$;

(c) $f(2x)f(0) = \left(f(x)\right)^2$.

3. Montrer que $f(0) = 0$ si, et seulement si, f est l'application identiquement nulle noté $\tilde{0}$.

4. Soit $f \in$ F. On suppose que f s'annule pour une valeur $a \neq 0$.

(a) On considère la suite (u_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{a}{2^n}.$$

Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(u_n) = 0.$$

(b) En déduire que si f s'annule alors $f = \widetilde{0}$.

5. Soit $f \in \mathrm{F}$. On suppose que $f \neq \widetilde{0}$.

(a) Calculer $f(0)$.

(b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0$.

(c) Montrer que f est paire.

Partie B

Soit G l'ensemble des fonctions g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$\exists f \in \mathrm{F} \setminus \{\widetilde{0}\},\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \ln\big(f(x)\big).$$

1. Montrer que tout élément de g de G vérifie la relation :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ g(x+y)\,g(x-y) = 2\big(g(x) + g(y)\big).$$

2. Déterminer $g(0)$ et montrer que g est une fonction paire.

3. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(nx) = n^2 g(x).$$

4. (a) Montrer que

$$\forall r \in \mathbb{Q},\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(rx) = r^2 g(x).$$

(b) On pose $g(1) = \lambda$. en déduire que $\forall r \in \mathbb{Q},\ g(r) = \lambda r^2$. En déduire $f(r)$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$.

d'après bac C, Lille 1977

15

Soit $f\colon \begin{array}{l} [0\,;8] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \left|x^2 - 6x\right| \end{array}$

1. Étudier la continuité de f sur $\mathrm{I} = [0\,;8]$.

2. Étudier les variations de f et déterminer $f(\mathrm{I})$.

3. Soit m un réel compris entre $f(0)$ et $f(8)$. Déterminer suivant les valeurs de m le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

16

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}.$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. (a) Étudier les variations de f.

(b) Déterminer l'image J de $\mathbb{R}$ par f.

3. Soit m un réel appartenant à J, déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

4. (a) Déterminer un intervalle I, le plus grand possible, tel que la restriction de $f|_{\mathrm{I}}$ de f à I soit une bijection de I sur $\mathrm{J}' = f|_{\mathrm{I}}(\mathrm{I})$.

(b) Exprimer, pour tout $x \in \mathrm{J}'$, $f|_{\mathrm{I}}^{-1}(x)$.

17

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\,|x|.$$

1. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

2. Déterminer les variations de f^{-1}.

3. Donner l'expression de $f^{-1}(x)$.

18

1. Soit f la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ par

$$f(x) = \sin(x).$$

(a) Montrer que f réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1\,;1]$. On notera arcsin sa fonction réciproque.

(b) Déterminer les variations de arcsin.

2. Soit g la fonction définie sur $[0\,;\pi]$ par

$$g(x) = \cos(x).$$

(a) Montrer que g réalise une bijection de $[0\,;\pi]$ sur $[-1\,;1]$. On notera arccos sa fonction réciproque.

(b) Déterminer les variations de arccos.

3. Montrer que pour tout $x \in [-1\,;1]$,

(a) $\arcsin(-x) + \arcsin(x) = 0$;

(b) $\arccos(-x) + \arccos(x) = \pi$;

(c) $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$.

19

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}.$$

1. Montrer que f admet une application réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

2. Donner l'expression de $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in \mathrm{J}$.

20

On considère les fonctions

$$\varphi\colon \begin{array}{l} \mathbb{R} \to [0\,;1] \\ x \mapsto x - \lfloor x \rfloor \end{array} \quad \text{et} \quad h\colon \begin{array}{l} [0\,;1] \to [0\,;1] \\ x \mapsto |2x-1| \end{array}$$

1. Soit $f = h \circ \varphi$.

(a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que f admet le réel 1 pour période.

(c) Montrer que f est une fonction paire.

2. Soit F la restriction de f au segment $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$. Montrer que F admet une fonction réciproque F^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition et l'ensemble image.

3. Soit $g = \mathrm{F}^{-1} \circ f$.

(a) Montrer que g est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que g est périodique de période 1.

(c) Montrer que g est paire.

(d) k étant un entier relatif, exprimer $g(x)$ en fonction de x et de k dans les deux cas suivants :

$$x \in \left[k\,;k+\frac{1}{2}\right[,\quad x \in \left[k-\frac{1}{2}\,;k\right[.$$

d'après bac C, Dijon 1977

Chapitre 5

Dérivabilité

Dans ce chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non-vide et non réduit à un point.

I Dérivabilité en un point

1. Définition

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un point de I.
On dit que f est dérivable en x_0 lorsque la fonction

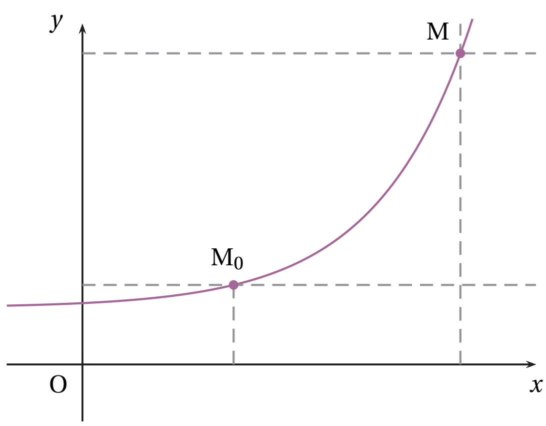
$$t : \mathrm{I} \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

admet une limite finie en x_0.
Quand c'est le cas, on appelle cette limite nombre dérivé de f en x_0 et on note

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Remarque :

- $t : x \mapsto \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est appelé le taux d'accroissement (ou de variation) entre x et x_0.
- Il est possible de se ramener au voisinage de 0 en effectuant le changement de variable $x = x_0 + h$.
  Pour tout $h \neq 0$ tel que $x_0 + h \in \mathrm{I}$
  $$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$
  et l'étude de la dérivabilité en x_0 se ramène alors à l'étude de
  $$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$



Exemple 1 :

- Montrons que $\begin{array}{rl} f: \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^3-2x^2+3x-6 \end{array}$ est dérivable en 2.

- Déterminer $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2+\sqrt{x}-18}{x-4}$.

2. Dérivabilité à droite, à gauche

Définition — dérivabilité à droite, à gauche

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un point de I.

- Si x_0 n'est pas l'extrémité gauche de I, on dit que f est dérivable à gauche en x_0 lorsque la fonction

$$\begin{array}{rl} t: \mathrm{I}\setminus\{x_0\} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \end{array}$$

  admet une limite à gauche x_0.

- Si x_0 n'est pas l'extrémité droite de I, on dit que f est dérivable à droite en x_0 lorsque la fonction

$$\begin{array}{rl} t: \mathrm{I}\setminus\{x_0\} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \end{array}$$

  admet une limite à droite x_0.

Lorsqu'elles existent, les limites à gauche (resp. à droite) en x_0, notées $f'_g(x_0)$ (resp. $f'_d(x_0)$) sont les nombres dérivés à gauche (resp. à droite) de f en x_0.

Remarque : f est dérivable à gauche (resp. à droite) en x_0 équivaut à dire que la restriction de f à $\mathrm{I}\cap\,]-\infty\,;x_0]$ (resp. à $\mathrm{I}\cap[x_0\,;+\infty[$) est dérivable en x_0.

Proposition

Soit x_0 un point intérieur à I. f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite en x_0 et que

$$f'_d(x_0) = f'_g(x_0).$$

On a alors

$$f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_g(x_0).$$

Exemple 2 :

- $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto |x| \end{array}$ n'est pas dérivable en 0.

- $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto |x| \end{array}$ est dérivable en 0.

- $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x\sin(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$ est dérivable en 0.

- $f : x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0.

3. Interprétation graphique

(a) Si f est dérivable en x_0 alors $\mathscr{C}_f$ admet une tangente au point $\mathrm{M}_0\left(x_0 ; f(x_0)\right)$ d'équation

(b) Si f n'est pas dérivable en x_0 on peut avoir plusieurs cas, par exemple :

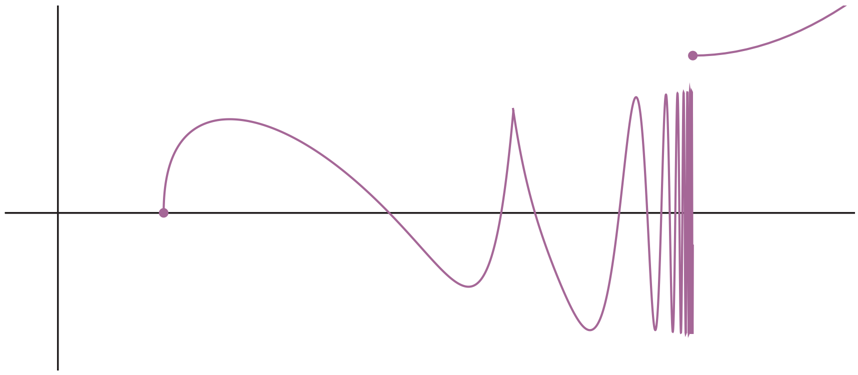
- si f est dérivable à droite et à gauche en x_0 mais que $f'_d(x_0) \neq f'_g(x_0)$ alors

- si f n'est pas dérivable à droite (resp. à gauche) mais que

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\pm\infty \quad \left(\text{resp. } \lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\pm\infty\right)$$

alors

Exemple 3 :



4. Développement limité d'ordre 1

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un point de I.

$$\text{f est dérivable en } x_0 \iff \begin{array}{l}\text{il existe } \ell\in\mathbb{R} \text{ et une fonction } \varepsilon:\mathrm{I}\to\mathbb{R} \text{ tels que}\\ \begin{cases}\forall x\in\mathrm{I},\ f(x)=f(x_0)+\ell(x-x_0)+(x-x_0)\,\varepsilon(x)\\ \lim\limits_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0\end{cases}\end{array}$$

Dans ces conditions, $f'(x_0)=\ell$.

Remarque : En considérant le changement de variable $x=x_0+h$ et l'intervalle $\mathrm{J}=\{h \mid x_0+h\in\mathrm{I}\}$, ce théorème peut se réécrire :

$$\text{f est dérivable en } x_0 \iff \begin{array}{l}\text{il existe } \ell\in\mathbb{R} \text{ et une fonction } \varepsilon:\mathrm{J}\to\mathbb{R} \text{ tels que}\\ \begin{cases}\forall h\in\mathrm{J},\ f(x_0+h)=f(x_0)+\ell h+h\varepsilon(h)\\ \lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h)=0\end{cases}\end{array}$$

Démonstration :

□

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un point de I.

Lorsqu'il il existe $\ell \in \mathbb{R}$ et une fonction $\varepsilon : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ tels que $\begin{cases} \forall x \in \mathrm{I},\ f(x) = f(x_0) + \ell(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x) \\ \lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0 \end{cases}$

on dit que f admet un développement limité d'ordre 1 au point x_0.

Remarque :

- Si f admet un développement limité d'ordre 1 en x_0 alors ce développement limité est unique.
- Si f admet un développement limité d'ordre 1 en x_0 alors $f(x_0) + \ell(x - x_0)$ est une valeur approchée à $|(x - x_0)\varepsilon(x)|$ près de $f(x)$.

Développement limité d'ordre 1 des fonctions usuelles en 0

I	fonctions	
$\mathrm{I} = \mathbb{R}$	$\sin(x) =$	
$\mathrm{I} = \mathbb{R}$	$\cos(x) =$	

I	fonctions	
$\mathrm{I} = \mathbb{R}$	$\mathrm{e}^x =$	
$\mathrm{I} =]-1\,;+\infty[$	$\ln(1+x) =$	
$\mathrm{I} =]-1\,;+\infty[,\ \alpha \in \mathbb{R}$	$(1+x)^\alpha =$	
$\mathrm{I} =]-1\,;+\infty[,\ \alpha = -1$	$\dfrac{1}{1+x} =$	

Exemple 4 : Utilisation des développements limités pour déterminer la limite de $\dfrac{\sqrt{2-h^2}-1}{\ln(h)}$ en 1.

II Fonctions dérivées, opérations sur les dérivées

1. Définition

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est dérivable sur I lorsque f est dérivable en tout point de I. On appelle alors fonction dérivée de f, que l'on note f', l'application de I dans $\mathbb{R}$ qui à tout réel x de I associe $f'(x)$.

2. Somme, produit, quotient

Proposition

Si f et g sont deux fonctions définies sur un intervalle I et dérivables en $x_0 \in \mathrm{I}$ alors :

- $f+g$ est dérivable en x_0 et $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$;
- kf, où k est un réel, est dérivable en x_0 et $(kf)'(x_0) = kf'(x_0)$;
- fg est dérivable en x_0 et $(fg)'(x_0) = f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0)$;
- si de plus $g(x_0) \neq 0$:
  - $\dfrac{1}{g}$ est dérivable en x_0 et $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(x_0) = -\dfrac{g'(x_0)}{\left(g(x_0)\right)^2}$,
  - $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\,g'(x_0)}{\left(g(x_0)\right)^2}$.

Corollaire

Si f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I alors :

- $f+g$ est dérivable sur I et $(f+g)' = f' + g'$;
- kf, où k est un réel, est dérivable sur I et $(kf)' = kf'$;
- fg est dérivable sur I et $(fg)' = f'g + fg'$;
- si de plus g ne s'annule pas sur I :
  - $\dfrac{1}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = -\dfrac{g'}{g^2}$;
  - $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.

3. Composée

Proposition — nombre dérivé d'une fonction composée

Soient I et J deux intervalles, f une application de I dans J et g une application définie sur J.
Si f est dérivable en $x_0 \in \mathrm{I}$ et g en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et

$$(g \circ f)'(x_0) = g'\left(f(x_0)\right) \times f'(x_0).$$

Démonstration :

$\square$

Corollaire

Soient I et J deux intervalles, f une application de I dans J et g une application définie sur J.
Si f est dérivable sur I et si g est dérivable sur J alors $g \circ f$ est dérivable sur I et

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'.$$

Exemple 1 :

- Soit $\begin{aligned} f : \ ]0\,;+\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$

- Soit $\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \mathrm{e}^{x^2} \end{aligned}$

- Dérivée de $\ln|u|$ sur un intervalle I où u est une fonction définie et dérivable sur I qui ne s'annule pas.

4. Fonction réciproque et dérivation

Proposition — nombre dérivé d'une fonction réciproque

Soit f une fonction continue et strictement monotone de l'intervalle I sur l'intervalle $\mathrm{J} = f(\mathrm{I})$ et dérivable en $x_0 \in \mathrm{I}$.

$$f^{-1} \text{ est dérivable en } y_0 = f(x_0) \iff f'(x_0) \neq 0.$$

Dans ce cas,

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Démonstration :

$\square$

Corollaire

Si f est une fonction dérivable et strictement monotone de l'intervalle I sur l'intervalle $\mathrm{J} = f(\mathrm{I})$ et si f' ne s'annule pas sur I, alors la fonction f^{-1} est dérivable sur J et

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Exemple 2 : Retrouvons, à l'aide du corollaire précédent des résultats déjà connus :

- Dérivée de $x \longmapsto \sqrt{x}$. La fonction racine carrée est la fonction réciproque de la fonction $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto x^2 \end{array}$

- Dérivée de $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction racine n-ième est la fonction réciproque de la fonction $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto x^n \end{array}$

5. Dérivabilité et continuité

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- Si f est dérivable en un point $x_0 \in \mathrm{I}$ alors f est continue en x_0.
- Si f est dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ alors f est continue sur I.

Démonstration :

□

Remarque :

- La réciproque est fausse, une fonction peut-être continue en un point sans y être dérivable.
- Une fonction dérivée n'est par forcément continue.

  Par exemple, soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

Définition

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I si elle est dérivable sur I et si f' est continue sur I. On note $\mathcal{C}^1(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

6. Dérivée successives

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

Si f' est dérivable sur I alors f admet une dérivée seconde notée f''.

Si f est n fois dérivable sur I, on note $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f sur I :

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'.$$

III Théorèmes généraux

1. Extremum local (rappel)

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f admet un maximum local (resp. un minimum local) en $x_0 \in \mathrm{I}$, lorsqu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathrm{I} \cap [x_0 - \alpha ; x_0 + \alpha], \ f(x) \leqslant f(x_0) \quad (\text{resp. } f(x) \geqslant f(x_0)).$$

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un point intérieur à I en lequel f est dérivable.
Si f admet un extremum local en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.

Démonstration : Supposons que f présente en x_0 un maximum local.

□

2. Théorème de Rolle

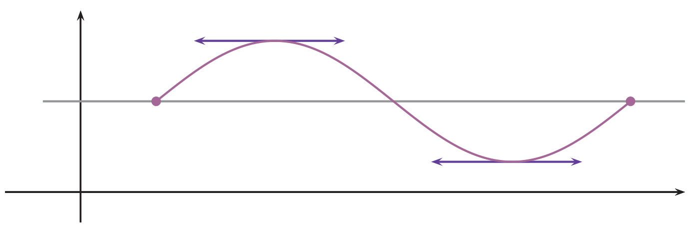
Théorème

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction définie sur $[a ; b]$.

Si f est
- continue sur $[a ; b]$;
- dérivable sur $]a ; b[$;
- telle que $f(a) = f(b)$,

alors il existe $c \in]a ; b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Illustration :



Démonstration :

□

Exemple 1 : $f : x \mapsto (x+1)(x-1)$ est

3. Accroissements finis

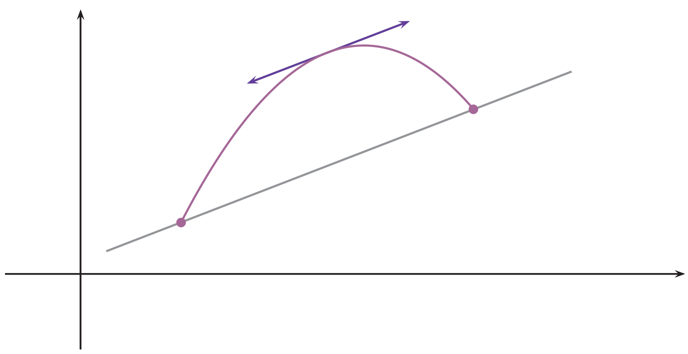
Théorème — des accroissements finis

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction définie sur $[a\,;b]$.

Si f est
- continue sur $[a\,;b]$;
- dérivable sur $]a\,;b[$,

alors il existe $c \in]a\,;b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$.

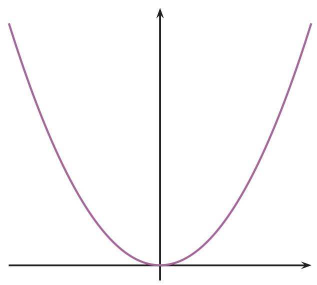
Illustration :



Démonstration :

□

Exemple 2 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. On considère deux réels a et b tels que $a < b$.



Théorème — inégalité des accroissements finis

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction définie sur $[a ; b]$.

Si f est
- continue sur $[a ; b]$;
- dérivable sur $]a ; b[$;
- telle que $\forall x \in]a ; b[,\ m \leqslant f'(x) \leqslant \mathrm{M}$, où m et M sont deux réels,

alors $m \leqslant \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant \mathrm{M}.$

Remarque : Une autre formulation équivalente est :

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction définie sur $[a ; b]$.

Si f est
- continue sur $[a ; b]$;
- dérivable sur $]a ; b[$;
- telle que $\forall x \in]a ; b[,\ |f'(x)| \leqslant k$, où k est un réel,

alors $\left|\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}\right| \leqslant k$

4. Théorème de la limite de la dérivée

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un point de I.

Si f est
- continue sur I;
- dérivable sur $\mathrm{I}\setminus\{x_0\}$ et que $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ existe et est égale à ℓ,

alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0)=\ell$.

Démonstration :

$\square$

Remarque : ce théorème donne une condition suffisante pour avoir f dérivable en x_0 mais qui n'est pas nécessaire. Par exemple, si on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ si $x\neq 0$ et $f(0)=0$, on a vu que f est dérivable en x_0 mais $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ n'existe pas.

Une application importante : la régularité du prolongement par continuité

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathrm{I}\setminus\{x_0\}$. Supposons que f admette en x_0 un prolongement par continuité $\tilde{f}$.

$\tilde{f}$ est continue sur I et dérivable sur $\mathrm{I}\setminus\{x_0\}$. Si $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)=\ell$ alors, d'après le théorème précédent, $\tilde{f}$ est dérivable sur I et $\tilde{f}'(x_0)=\ell$.

IV Dérivation et monotonie

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- f est croissante sur I $\iff$ $\forall x\in\mathrm{I},\ f'(x)\geqslant 0$.
- f est décroissante sur I $\iff$ $\forall x\in\mathrm{I},\ f'(x)\leqslant 0$.
- f est constante sur I $\iff$ $\forall x\in\mathrm{I},\ f'(x)=0$.

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

Si
- $\forall x \in \mathrm{I}$, $f'(x) \geqslant 0$ (resp. $f'(x) \leqslant 0$) ;
- f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points

alors f est strictement croissante sur I (resp. strictement décroissante sur I).

Exemple 1 : $f : x \mapsto x^3$.

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

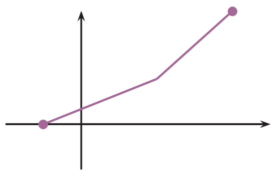
Si f est
- continue sur I;
- dérivable sur I sauf, éventuellement, en un nombre fini de points $x_0, \ldots, x_n$,

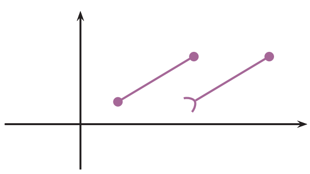
alors
- • $\forall x \in \mathrm{I} \setminus \{x_0, \ldots, x_n\}$, $f'(x) \geqslant 0$
  • f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points

  $\Longrightarrow$ f est strictement croissante sur I;
- • $\forall x \in \mathrm{I} \setminus \{x_0, \ldots, x_n\}$, $f'(x) \leqslant 0$
  • f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points

  $\Longrightarrow$ f est strictement décroissante sur I.

Exemple 2 :





Dérivabilité en un point

1

En utilisant la définition de la dérivée, étudier la dérivabilité des fonctions suivantes en x_0 :

1. $f : x \mapsto 6x - 2 + 2(x-3)\sqrt{|x-3|}$, $\quad x_0 = 3$.

2. $g : x \mapsto x^2 - |x|$, $\quad x_0 = 0$.

2

1. Montrer que si une fonction f, définie sur un intervalle I, est dérivable en un point x_0 intérieur à I, alors la fonction

$$v : h \mapsto \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$$

admet une limite en 0.

2. Que dire de la réciproque ?
On pourra considérer la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

3

Soit f une fonction définie sur un intervalle I qui est dérivable en un point x_0 intérieur à I.
Déterminer les limites quand h tend vers 0 de :

1. $u : h \mapsto \dfrac{f(x_0+4h) - f^2(x_0-h)}{h}$;

2. $v : h \mapsto \dfrac{(x_0+2h)f(x_0) - x_0 f(x_0+h)}{h}$.

4

Déterminer m pour que la fonction f soit dérivable sur son ensemble de définition dans les cas suivants :

1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-3}{x-2} & \text{si } x \leqslant 3 \\ m(x^2-9) & \text{si } x > 3 \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{x+1} & \text{si } x \leqslant 0 \\ x^2 + (m^2-2)x + 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

5

Soient f une fonction dérivable sur $[0\,;1]$ telle que $f(0) = f(1)$ et g la fonction définie par

$$g(x) = \begin{cases} f(2x) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2} \\ f(2x-1) & \text{si } \dfrac{1}{2} < x \leqslant 1 \end{cases}$$

1. La fonction g est-elle continue sur $[0\,;1]$?

2. À quelles conditions la fonction g est-elle dérivable sur $[0\,;1]$?

6

Soit f la fonction définie sur $]-1\,;1[$ par

$$f(x) = \frac{x}{\ln|x|} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0.$$

1. Montrer que f est dérivable sur $]-1\,;1[$.

2. On considère les suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_n = \frac{1}{\pi/2 + 2n\pi} \text{ et } v_n = \frac{1}{-\pi/2 + 2n\pi}.$$

Calculer les limites des suites $(f'(u_n))$ et $(f'(v_n))$. En déduire que la fonction f' n'est pas continue au point 0.

Calculs de dérivées

7

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x(\ln|x|)^2$;

2. $f(x) = \ln\left|\dfrac{x-2}{x-3}\right|$;

3. $f(x) = \ln\sqrt{\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|}$;

4. $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$;

5. $f(x) = \left(\dfrac{\cos^2(x)+1}{\sin^2(x)+1}\right)^2$.

8

Montrer que si une fonction dérivable est paire alors sa fonction dérivée est impaire.

9

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, c'est à dire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée f' est continue sur $\mathbb{R}$, telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (f \circ f)(x) = \frac{x}{2} + 3.$$

1. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f\left(\frac{x}{2} + 3\right) = \frac{f(x)}{2} + 3.$$

2. En déduire que f' est constante.

3. Déterminer les fonctions f qui conviennent.

10

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f_n la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par

$$f_n(x) = x^n(1 - \ln(x)).$$

1. (a) Démontrer que la fonction f_n est prolongeable par continuité en 0.
On notera $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n ainsi prolongée dans un repère.

(b) Étudier la dérivabilité de ce prolongement. (On distinguera deux cas suivant les valeurs de n).

2. Étudier, en fonction de n,

$$\lim_{x \to +\infty} f_n(x).$$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par

$$g_n(x) = n - 1 - n\ln(x).$$

Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ possède une unique solution, noté α_n sur $]0\,;+\infty[$.

(b) Dresser le tableau de variation de f_n.

4. (a) Étudier suivant les valeurs de x le signe de

$$f_{n+1}(x) - f_n(x).$$

(b) En déduire la position relative des courbes $\mathcal{C}_n$ et $\mathcal{C}_{n+1}$.

5. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, les courbes $\mathcal{C}_n$ passent par trois points fixes dont on précisera les coordonnées.

Fonction réciproque

11

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\mathrm{e}[$ par

$$f(x) = \frac{\ln(x) - 2}{\ln(x) - 1}.$$

1. Étudier le sens de variation de la fonction

$$g : x \mapsto \frac{x-2}{x-1}$$

sur $]-\infty\,;1[$ et en déduire le sens de variation de f sur $]0\,;\mathrm{e}[$.

2. Montrer que f définit une bijection de $]0\,;\mathrm{e}[$ sur $]1\,;+\infty[$.

3. Montrer que f^{-1}, la fonction réciproque de f est dérivable au point 2 et calculer le nombre dérivé de f^{-1} en ce point.

12

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}.$$

1. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle I à préciser.

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 1 - \big(f(x)\big)^2.$$

3. Montrer que f^{-1} est dérivable sur I et calculer sa dérivée.

4. Déterminer f^{-1} et retrouver le résultat précédent en dérivant.

Dérivées successives

13

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left|x^3\right|.$$

Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer $f''(x)$.

14

Soit $f : x \mapsto \sin(x)$. Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

15

Soit f la fonction polynôme

$$f : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

1. Déterminer les dérivées successives de f.

2. Montrer que

$$\forall x_0 \in \mathbb{R},\ \forall h \in \mathbb{R},$$
$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) + \frac{h^3}{6}f^{(3)}(x_0).$$

3. On prend $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 3$.
Montrer que $f(1) + 0{,}002 \times f'(1)$ est une valeur approchée de $f(1{,}002)$ à 10^{-4} près.

16

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x-1)\,\mathrm{e}^{-x}.$$

Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = (-1)^n(x - n - 1)\,\mathrm{e}^{-x}.$$

17

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x\cos(x).$$

1. Déterminer f' et montrer que $f'(x)$ peut se mettre sous la forme

$$\mathrm{A}\mathrm{e}^x\cos(x + \varphi),$$

où A et φ sont des réels à déterminer.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer $f^{(n)}(x)$.

18

Soit $n \in \mathbb{N}$ et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f_n(x) = x^n \mathrm{e}^{1/x}.$$

Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}^*,\ f_n^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}} \mathrm{e}^{1/x}.$$

19

Soient f et φ deux fonctions définies sur $]0\,;+\infty[$ par

$$f(x) = \ln(1+x) \times \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \text{ et } \varphi(x) = (x-1)\ln(1+x) - x\ln(x).$$

1. Déterminer la dérivée de f et l'exprimer en fonction de φ.

2. Déterminer φ' et φ''.

3. Montrer que l'équation $\varphi'(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0\,;1]$. En déduire les variations de φ sur $]0\,;+\infty[$ puis celles de f.

4. Montrer que

$$\forall x \in]0\,;+\infty[,\ \ln(1+x)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \leqslant (\ln(2))^2.$$

Accroissements finis

20

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$, et f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

1. Montrer que l'on peut appliquer le théorème des accroissements finis à f entre a et b et calculer le nombre $c \in]a\,;b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b-a) f'(c).$$

2. En déduire une construction géométrique de la tangente à l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{1}{x}$ en un point C d'abscisse c.

21

1. Soient $a \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}^*$ et f une fonction. Montrer que si f est une fonction continue sur $[a\,;a+h]$ et dérivable sur $]a\,;a+h[$ alors il existe un réel $\theta \in]0\,;1[$ tel que

$$f(a+h) - f(a) = h f'(a + \theta h).$$

2. Déterminer θ en fonction de h lorsque f est une fonction trinôme de second degré.

3. Déterminer θ en fonction de h lorsque $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$.

22

1. Soit $f : x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$, et a et b deux réels tels que $0 < a < b$.
Montrer qu'il existe un réel $c \in]a\,;b[$ tel que

$$\frac{a + \sqrt{1+a^2}}{b + \sqrt{1+b^2}} = \mathrm{e}^{\frac{a-b}{\sqrt{1+c^2}}}.$$

2. Plus généralement, soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$, qui ne s'annule pas sur cet intervalle et qui est dérivable sur $]a\,;b[$.
Montrer qu'il existe $c \in]a\,;b[$ tel que

$$\frac{f(a)}{f(b)} = \mathrm{e}^{(a-b)\frac{f'(c)}{f(c)}}.$$

23

À l'aide du théorème des accroissements finis déterminer

$$\lim_{x \to +\infty} \left((x+1)\,\mathrm{e}^{1/(x+1)} - x\,\mathrm{e}^{1/x}\right).$$

24

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{\mathrm{e}^{u_n}}{u_n + 2}.$$

1. Soit $f :]-2\,;+\infty[\to \mathbb{R}$
$$x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x}{x+2}$$

(a) Déterminer f', dresser le tableau de variation de f et préciser $f\big([0\,;1]\big)$.
Expliquer pourquoi la suite (u_n) est bien définie.

(b) Dresser le tableau de variation de f' sur $[0\,;1]$ et en déduire que

$$\forall x \in [0\,;1],\ \frac{1}{4} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{2}{3}.$$

(On pourra utiliser l'inégalité $\mathrm{e} \leqslant 3$.)

(c) En déduire que

$$\forall x \in [0\,;1],\ \left|f(x)\right| \leqslant \frac{2}{3}.$$

2. **(a)** Montrer que la fonction $g : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{x+2} - x$ est strictement décroissante sur $[0\,;1]$.
(On pourra dériver g deux fois)

(b) Établir que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution sur $[0\,;1]$ que l'on notera α.

3. À l'aide de l'inégalité des accroissements finis montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{2}{3}|u_n - \alpha|$$

en déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

4. Donner une valeur de n telle que u_n soit une valeur approchée de α à 10^{-4} près.

25

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur $[0\,;+\infty[$ telle que $f'(1)=1$ et, pour tout $x \in [0\,;+\infty[$ $f''(x)>0$.
Soit (u_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$u_n = f(n) - f(0)$$

Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
(On pourra considérer la série de terme général $v_n = f(n+1) - f(n)$ et utiliser l'égalité des accroissements finis sur $[n\,;n+1]$.)

Intégration

I Introduction : une construction de l'intégrale sur un segment

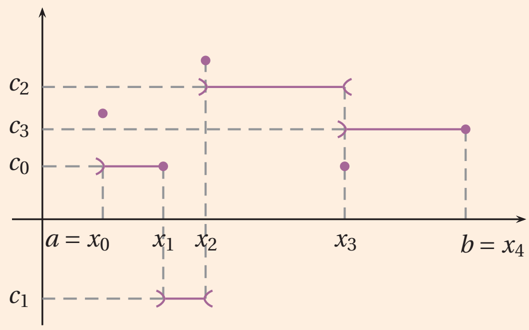
1. Intégration d'une fonction en escalier

Définition — fonction en escalier

Soit f une fonction définie sur un segment $[a;b]$. On dit que f est une **fonction en escalier** lorsqu'il existe une famille de réels $(x_0,\ x_1,\dots,x_n)$ tels que :

- $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$;
- la restriction de f à chaque intervalle $]x_k\,;x_{k+1}[$ est constante, c'est à dire qu'il existe n réels $c_0,\ c_1,\dots,c_{n-1}$ tels que

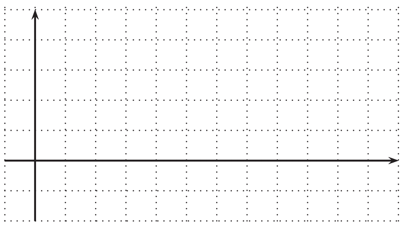
$$\forall k \in [\![0;n-1]\!],\ \forall x \in\ ]x_k\,;x_{k+1}[,\ f(x) = c_k.$$



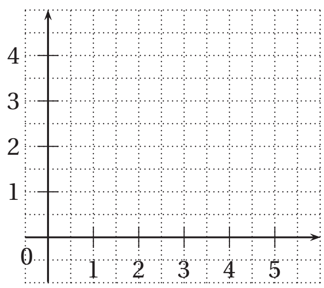
Une famille de réels $(x_0,\ x_1,\dots,x_n)$ tels que $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ est appelée **subdivision** de $[a;b]$ adaptée à f.
L'ensemble des fonctions en escalier définies sur $[a;b]$ est noté $\mathcal{E}\big([a;b]\big)$.

Exemple 1 :

- $f\colon\ [a;b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto c$, avec $c \in \mathbb{R}$.



- $f\colon\ [a;b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \lfloor x \rfloor$



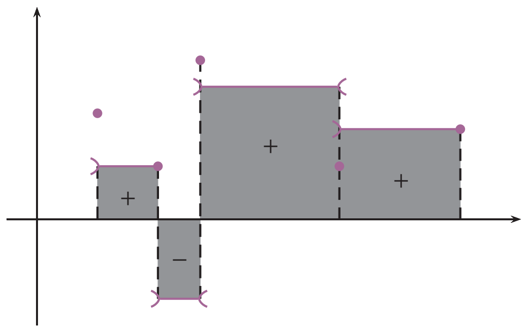
Définition — intégrale d'une fonction en escalier

Soit $f \in \mathcal{E}\big([a;b]\big)$, $(x_0, x_1,\dots,x_n)$ une subdivision de $[a;b]$ adaptée à f et $(c_0, c_1,\dots,c_{n-1})$ la famille des valeurs prises par f sur les intervalles $]x_k\,;x_{k+1}[,\ k \in [\![0;n-1]\!]$. On appelle intégrale de f sur $[a;b]$ le réel :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} c_k\,(x_{k+1} - x_k).$$

Interprétation géométrique

$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est la somme des aires algébriques des rectangles délimités par le graphe de f, les aires des rectangles situées au-dessus de l'axes des abscisses sont comptées positivement, celles en dessous négativement.



2. Définition de l'intégrale de Riemann d'une fonction bornée sur un segment

Soit f une fonction définie et bornée sur un segment $[a;b]$, $(a<b)$. On associe à f les deux ensembles de fonctions en escalier :

$$\mathcal{E}_f^- = \{\varphi \in \mathcal{E}([a;b]) \mid \forall x \in [a;b],\ \varphi(x) \leqslant f(x)\}, \quad \mathcal{E}_f^+ = \{\varphi \in \mathcal{E}([a;b]) \mid \forall x \in [a;b],\ \varphi(x) \geqslant f(x)\}.$$

Ces deux ensembles ne sont pas vides car, f étant bornée, on peut trouver deux réels m et M tels que :

$$\forall x \in [a;b],\ m \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{M}.$$

On a donc $x \mapsto m$ qui appartient à $\mathcal{E}_f^-$ et $x \mapsto \mathrm{M}$ qui appartient à $\mathcal{E}_f^+$.

On considère l'ensemble de réels $\mathrm{S}_f^- = \left\{\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x \mid \varphi \in \mathcal{E}_f^-\right\}$ et on admet que cet ensemble possède une borne supérieure I_f^-, c'est à dire qu'il existe un réel I_f^- tel que :

- $\forall a \in \mathrm{S}_f^-,\ a \leqslant \mathrm{I}_f^-$;
- $\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in \mathrm{S}_f^-,\ \mathrm{I}_f^- - \varepsilon < a \leqslant \mathrm{I}_f^-$.

De la même manière, on admet que l'ensemble de réels $\mathrm{S}_f^+ = \left\{\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x \mid \varphi \in \mathcal{E}_f^+\right\}$ admet une borne inférieure I_f^+ où I_f^+ est tel que :

- $\forall a \in \mathrm{S}_f^+,\ \mathrm{I}_f^+ \leqslant a$;
- $\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in \mathrm{S}_f^+,\ \mathrm{I}_f^+ \leqslant a < \mathrm{I}_f^+ + \varepsilon$.

Définition — fonction intégrable au sens de Riemann

Soit f une fonction définie et bornée sur un segment $[a;b]$, $(a<b)$. On dit que f est **intégrable au sens de Riemann** lorsque

$$\mathrm{I}_f^- = \mathrm{I}_f^+.$$

- Cette valeur commune, notée
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$
est l'intégrale de f sur $[a;b]$.
- Par convention,
$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

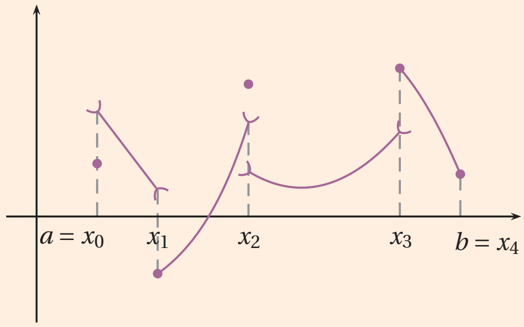
Remarque : Si f est définie en a on pose $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

3. Exemple de fonctions intégrables au sens de Riemann : les fonctions continues par morceaux

Définition — **fonctions continues par morceaux**

Soit f une fonction définie sur un segment $[a;b]$. On dit que f est une fonction continue par morceaux sur $[a;b]$ lorsqu'il existe une famille de réels $(x_0,\ x_1,\ldots,x_n)$ tels que :

- $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$,
- la restriction de f à chaque intervalle $]x_k\,;x_{k+1}[$, $k \in [\![0\,;n-1]\!]$ est continue, et possède des limites finie en x_k et x_{k+1}, c'est à dire que $f|_{]x_k\,;x_{k+1}[}$ est prolongeable par continuité en x_k et x_{k+1}.



Exemple 2 :

- Toute fonction continue sur un segment $[a;b]$ est continue par morceaux sur ce segment.
- Toute fonction en escalier sur un segment $[a;b]$ est continue par morceaux sur ce segment.
- La fonction partie entière est continue par morceaux sur tout segment $[a;b]$.

Théorème

Les fonctions continues par morceaux sur un segment $[a;b]$ sont intégrables au sens de Riemann sur ce segment.

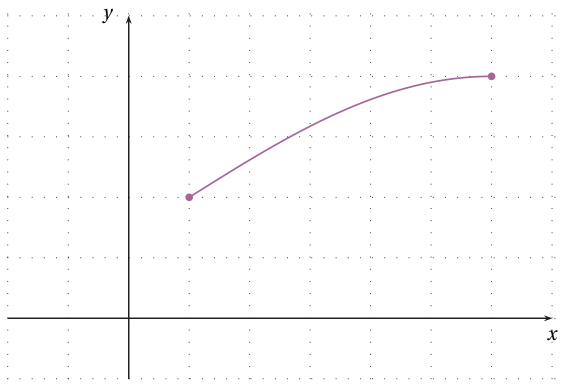
Remarque : D'après le théorème précédent, toute fonction continue sur un segment $[a;b]$ est intégrable au sens de Riemann sur ce segment.

4. Valeur moyenne

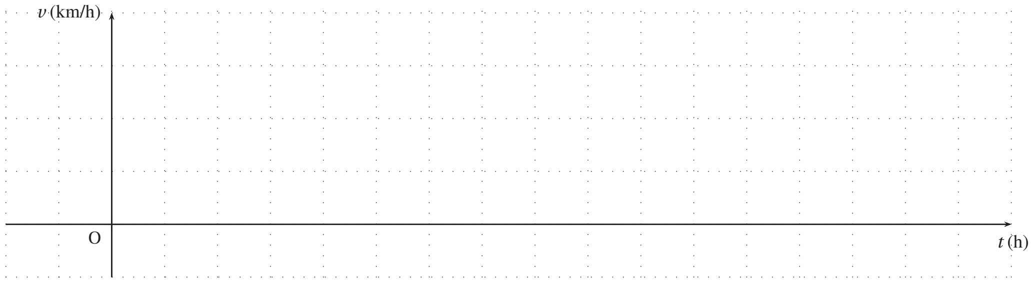
Définition — **valeur moyenne**

Soit f une fonction continue sur un segment $[a;b]$, $(a<b)$.
On appelle valeur moyenne de la fonction f sur $[a;b]$ le réel :

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$



Exemple 3 : Une voiture part de Nice pour aller à Marseille. On représente ci-dessous sa vitesse en fonction du temps.



5. Propriété de l'intégrale sur un segment

Théorème

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et a et b deux réels de I.

- **Linéarité :**

$$\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\ \int_a^b\big(\lambda f(x)+\mu g(x)\big)\,\mathrm{d}x=\lambda\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\mu\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

- **Relation de Chasles :**

$$\forall c\in\mathrm{I},\ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

- **Positivité :** si $a\leqslant b$,

$$\Big(\forall x\in[a\,;b],\ f(x)\geqslant 0\Big)\Longrightarrow\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant 0.$$

- **Croissance :** si $a\leqslant b$,

$$\Big(\forall x\in[a\,;b],\ f(x)\leqslant g(x)\Big)\Longrightarrow\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Théorème — inégalité de la moyenne

Si f est continue sur $[a\,;b]$ $(a<b)$ alors

$$\min_{x\in[a\,;b]}\big(f(x)\big)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\max_{x\in[a\,;b]}\big(f(x)\big).$$

Remarque : La double inégalité reste vraie si $a>b$.

Théorème — *inégalité triangulaire*

Si f est continue sur $[a;b]$ alors

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

⚠ Dans l'expression précédente $a \leqslant b$.

Démonstration :

□

6. Sommes de Riemann

Définition

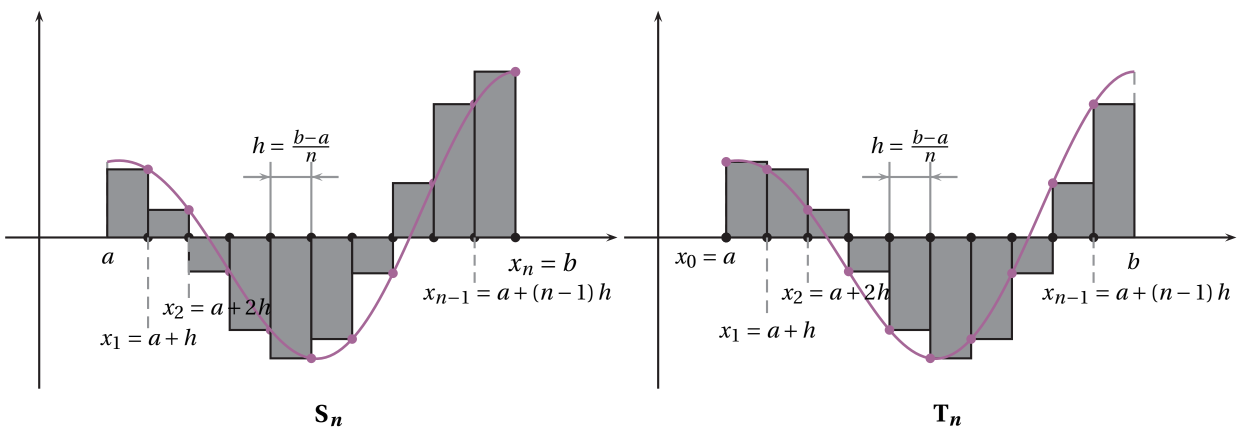
Soient f une fonction continue sur un segment $[a;b]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle sommes de Riemann de f sur $[a;b]$ les quantités :

$$\mathrm{S}_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{T}_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right).$$

Illustration :

$h = \dfrac{b-a}{n}$ est le pas.

Pour tout $k \in [\![0;n]\!]$ on pose $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n} = a + kh$.



S_n et T_n sont les sommes algébriques des aires des rectangles.

Théorème

Si f est continue sur $[a\,;b]$ alors
$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{T}_n = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration :

Exemple 4 : On considère la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{1}{n^4} \sum_{k=0}^{n-1} k^3$. Montrons que (u_n) converge et déterminons sa limite.

II Intégrale d'une fonction continue

1. Primitives

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et F une fonction définie et dérivable sur I. On dit que F est une primitive de f sur I lorsque,

$$\forall x \in \mathrm{I},\ \mathrm{F}'(x) = f(x).$$

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et F une primitive de f sur I.
L'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions

$$\begin{aligned} \mathrm{F} :\ & \mathrm{I} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \mathrm{F}(x) + \mathrm{C} \end{aligned}$$

où C est un réel.

Remarque :

L'hypothèse I est un intervalle est importante. Par exemple, considérons la fonction f définie sur $[0;1] \cup [2;3]$ par $f(x) = 0$ et la fonction F définie sur $[0;1] \cup [2;3]$ par

$$\mathrm{F}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0;1] \\ 2 & \text{si } x \in [2;3]. \end{cases}$$

F est dérivable sur $[0;1] \cup [2;3]$ et pour tout $x \in [0;1] \cup [2;3]$, $\mathrm{F}'(x) = 0$. F est donc une primitive de f sur $[0;1] \cup [2;3]$.

Considérons l'ensemble : $\mathrm{E} = \left\{ \mathrm{G} \mid \begin{smallmatrix} \mathrm{G} :\ [0;1] \cup [2;3] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \mathrm{F}(x) + \mathrm{C} \end{smallmatrix} \text{ où } \mathrm{C} \in \mathbb{R} \right\}$.

Certes,

$$\forall \mathrm{G} \in \mathrm{E},\ \forall x \in [0;1] \cup [2;3],\ \mathrm{G}'(x) = 0,$$

mais si l'on considère la fonction H définie par

$$\mathrm{H}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0;1] \\ 1 & \text{si } x \in [2;3], \end{cases}$$

on a

$$\forall x \in [0\,;1] \cup [2\,;3]\,,\ \mathrm{H}'(x) = 0$$

pourtant $\mathrm{H} \notin \mathrm{E}$.

Rappel : primitives usuelles

Dans le tableau ci-dessous, F est une primitive de f sur tout intervalle où f est continue.

fonction f	primitive F
x^{α} ($\alpha \neq -1$)	
$\dfrac{1}{x}$	
e^{x}	
$\cos(x)$	
$\sin(x)$	
$1+\tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$	

fonction f	primitive F
$u'u^{\alpha}$ ($\alpha \neq -1$)	
$\dfrac{u'}{u}$	
$u'e^{u}$	
$u'\cos(u)$	
$u'\sin(u)$	
$u' \times (v' \circ u)$	

Exemple 1 : Déterminons une primitive sur $\mathrm{I} = \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ de $f : x \mapsto \tan(x)$.

2. Théorème fondamental de l'intégration

Théorème — théorème fondamental de l'intégration

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a \in \mathrm{I}$.
La fonction F définie sur I par :

$$\mathrm{F}(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

Démonstration :

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I.

$$\forall (a\,;b) \in \mathrm{I}^2,\ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a).$$

Théorème

Soit f une fonction continue et **positive** sur le segment $[a\,;b]$.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \iff f \text{ est nulle sur } [a\,;b].$$

Démonstration :

III Calcul intégral

1. Intégration par partie

Théorème — I.P.P.

Si u et v sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a\,;b]$ alors

$$\int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x = \left[u(x)\,v(x)\right]_a^b - \int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x$$

Démonstration :

Exemple 1 : Déterminons la primitive de $\ln$ sur $]0\,;+\infty[$ qui s'annule en 1.

2. Changement de variable

Théorème

Soient I et J des intervalles, φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur J telle que $\varphi(\mathrm{J}) \subset \mathrm{I}$ et f une fonction continue sur I.
Pour tout α et β dans J on a :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration :

Méthode pratique pour calculer une intégrale à l'aide d'un changement de variable

- On dispose de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Le changement de variable $x = \varphi(t)$ exprime la « variable actuelle x » en fonction de la « nouvelle variable t ».

- On dispose de $\int_{\alpha}^{\beta} f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$. Le changement de variable $x = \varphi(t)$ exprime la « nouvelle variable x » en fonction de la « variable actuelle t ».

Exemple 2 :

- « variable actuelle x » en fonction de la « nouvelle variable t » :
  - Calcul de $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ en posant $x = \sin(t)$.

- Calcul de $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^3} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln(x)}$ en posant $x = \mathrm{e}^t$.

- « nouvelle variable x » en fonction de la « variable actuelle t » :
  - Calcul de $\displaystyle\int_0^{3\pi/2} \sin^2(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t$ en posant $x = \sin(t)$.
  - Calcul de $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t\left(t^3+1\right)}\,\mathrm{d}t$ en posant $x = t^3$

Exemple d'application : Intégrale d'une fonction paire ou impaire.

Soit f une fonction continue sur $[-a\,;a]$, $a>0$.

3. Fonction définie par une intégrale

Soient

- f une fonction continue sur un intervalle I ;
- u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle J telles que $u(\mathrm{J}) \subset \mathrm{I}$ et $v(\mathrm{J}) \subset \mathrm{I}$.

On définit sur J la fonction g par

$$g(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemple 3 : Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par

$$g(x) = \int_{x}^{x^2} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Déterminons les variations de g sur $]0\,;+\infty[$.

Propriétés de l'intégrale

1

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient f et g deux fonctions continues sur le segment $[a;b]$. Démontrer que

$$\left(\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

On pourra considérer le polynôme en λ :

$$\int_a^b \left(f(x)+\lambda g(x)\right)^2 \mathrm{d}x.$$

2

Soient f et g deux fonctions continues sur le segment $[a;b]$ telles que :

$$\forall x \in [a;b],\ g(x) \geqslant 0.$$

Démontrer qu'il existe $c \in [a;b]$ tel que :

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

3

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \int_0^n \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}.$$

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

2. (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$,

$$\int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \leqslant \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x^2}.$$

(b) En déduire que la suite (u_n) est majorée.

4

Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des fonctions réelles définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. On désigne par φ tout élément de $\mathcal{D}$ qui vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) = \sqrt{(\varphi(x))^2+3}$$

où φ' est la dérivée de φ.

1. Montrer que, si $x>0$ alors $\varphi(x) \geqslant \varphi(0) + x\sqrt{3}$ et en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)$.

2. De la même manière, déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x)$.

3. Montrer que toute fonction φ admet dans $\mathcal{D}$ une fonction réciproque dont on précisera l'ensemble de définition.

5

Soient f la fonction définie sur $[2;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x\ln^2(x)}$ et $(u_n)_{n\geqslant 3}$ la suite définie par :

$$u_n = \sum_{i=3}^{n} \frac{1}{i\ln^2(i)}.$$

1. Montrer que f est décroissante sur $[2;+\infty[$.

2. Déterminer une primitive de f sur $[2;+\infty[$.

3. (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 3$,

$$u_n \leqslant \int_2^n \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2(x)}.$$

(b) En déduire que $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est bornée.

6

Soient f et F les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x - x - 1 \quad \text{et} \quad \mathrm{F}(x) = (\mathrm{e}-1)\,\mathrm{e}^x - x - \frac{3}{2}.$$

1. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{F}(x) = \int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

2. Déterminer les variations des fonctions f et F sur $\mathbb{R}$.

3. Justifier l'existence, pour tout réel positif x, d'un unique réel c de l'intervalle $[x;x+1]$ tel que :

$$\int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t = f(c).$$

En déduire que $\mathrm{F}(\mathbb{R}) \subset f(\mathbb{R})$.

4. On définie la suite (c_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x = f(c_n) \quad \text{et} \quad c_n \in [n;n+1]$$

et la suite (δ_n) par $\delta_n = c_n - n$.

(a) Montrer que la suite (δ_n) est bornée.

(b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{e} - 1 - \frac{1}{2\mathrm{e}^n} = \mathrm{e}^{\delta_n} - \frac{\delta_n}{\mathrm{e}^n}.$$

(c) Montrer que la suite (δ_n) converge vers une limite ℓ que l'on déterminera.

7

Soit $f\colon [0;1] \to [0;1]$ une fonction continue vérifiant

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Montrer que la fonction f est la fonction constante $x \mapsto 0$ ou $x \mapsto 1$ sur $[0;1]$.

8

1. Montrer que pour tout réel $x \neq -1$ on a :

$$1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^{n-1}x^{n-1} = \frac{1}{x+1} - \frac{(-x)^n}{1+x}.$$

En déduire l'égalité :

$$\int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x} = \ln(2) - \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right].$$

2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0;1],\ -x^n \leqslant \frac{(-x)^n}{1+x} \leqslant x^n.$$

En déduire la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Sommes de Riemann

9

Déterminer dans les cas suivants la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

1. $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

2. $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

3. $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{n^3+2k^3}$.

4. $u_n = \left(\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}}$.

Intégration par parties

10

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une ou plusieurs intégration par parties :

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x)\,\mathrm{d}x$

2. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x^3\ln(x)\,\mathrm{d}x$

3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$

4. $\displaystyle\int_0^{1} \mathrm{e}^x\cos(x)\,\mathrm{d}x$

5. $\displaystyle\int_1^{2} \sin(\ln(x))\,\mathrm{d}x$

11

Soit la fonction $f : t \mapsto \ln\left|\dfrac{t}{1-t}\right|$.

1. Trouver l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f et calculer $f'(t)$ pour tout $t \in \mathcal{D}_f$.

2. Pour tout $x > 1$, soit $\varphi(x) = \displaystyle\int_2^x \frac{\ln(t)}{(1-t)^2}$.
Calculer $\varphi(x)$ en intégrant par partie.

3. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \varphi(x)$.

12

Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$u_n = \left(\prod_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}}.$$

13

1. On pose, pour tout entier naturel n non nul,

$$\mathrm{I}_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n \mathrm{e}^{-x}\,dx.$$

(a) À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1.

(b) Prouver que, pour tout entier naturel n non nul,

$$0 \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \frac{1}{n!}\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,dx.$$

En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n$.

(c) Montrer, en utilisant une intégration par parties que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\mathrm{I}_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} - \mathrm{I}_n$$

2. On considère la suite réelle (a_n), définie sur $\mathbb{N}^*$ par $a_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n non nul,

$$a_{n+1} = a_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

(a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul,

$$a_n = \frac{1}{\mathrm{e}} + (-1)^n \mathrm{I}_n.$$

(b) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n$.

14

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer I_1.

2. Montrer que la suite (I_n) est monotone et déterminer son sens de variation.

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{\sqrt{2}(n+1)} \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

En déduire la limite de la suite (I_n).

4. Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$,

$$\mathrm{I}_n + \mathrm{I}_{n-2} = \int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

En intégrant par parties I_n en déduire que, pour tout $n \geqslant 2$,

$$n\mathrm{I}_n = \sqrt{2} - (n-1)\mathrm{I}_{n-2}.$$

5. On admet dans cette question que $\mathrm{I}_0 = \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$. Calculer I_2 et I_3.

6. Calcul de I_0 : on considère la fonction $s\colon \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\end{array}$.

(a) Montrer que s est une bijection.

(b) Déterminer une expression de sa bijection réciproque.

(c) Montrer que s^{-1} est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

(d) En déduire la valeur de I_0.

15

Soit a un réel strictement positif.

1. Par une intégration par parties, démontrer que :

$$\int_0^a x e^x \, dx = a e^a - \int_0^a e^x \, dx.$$

En déduire que

$$e^a = 1 + a + \int_0^a (a-x) e^x \, dx.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$\mathrm{I}_n = \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!} e^x \, dx.$$

Démontrer que

$$\mathrm{I}_n = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} + \mathrm{I}_{n+1}.$$

3. Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \ldots + \frac{a^n}{n!} + \mathrm{I}_n.$$

4. (a) Démontrer que

$$0 \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \frac{a^n}{n!}\left(e^a - 1\right).$$

(b) On pose $u_n = \dfrac{a^n}{n!}$. Calculer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. Montrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que :

$$\forall n \geqslant n_0,\ u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2} u_n.$$

En déduire que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n_0} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0}.$$

(c) En déduire les limites de u_n et de I_n quand n tend vers $+\infty$ et montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + a + \frac{a}{2!} + \ldots \frac{a^n}{n!}\right) = e^a.$$

16

Intégrales de Wallis

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\, dx$.

1. Calculer I_0, I_1 et I_2.

2. Par une intégration par partie, établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2}.

3. (a) On suppose que n est pair, c'est à dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$. À l'aide de la relation de récurrence précédente déterminer l'expression de I_{2p}.

(b) On suppose que n est impair. Déterminer l'expression de I_n.

4. (a) Montrer que (I_n) est décroissante et en déduire que (I_n) est convergente.

(b) En déduire que

$$\frac{\mathrm{I}_{n+2}}{\mathrm{I}_n} \leqslant \frac{\mathrm{I}_{n+1}}{\mathrm{I}_n} \leqslant 1.$$

(c) En déduire

$$\lim_{p\to+\infty} \left(\left(\frac{2\times 4\times\ldots\times 2p}{1\times 3\times 5\times\ldots\times(2p-1)}\right)^2 \times \frac{1}{2p+1}\right).$$

5. (a) Montrer que la suite $\left((n+1)\mathrm{I}_{n+1}\mathrm{I}_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

(b) En déduire les limites de I_n et $\mathrm{I}_n\sqrt{n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Changement de variable

17

Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable donné :

1. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}}$, $x = 4\sin^2(t)$.

2. $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1+x^3}\, dx$, $t = x^3$.

3. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}$, $x = t^2$.

4. $\displaystyle\int_2^e \frac{dx}{x(\ln(x))^3}$, $x = e^t$.

18

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n(x)}{\sin^n(x)+\cos^n(x)}\, dx \quad \text{et} \quad \mathrm{J}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n(x)}{\sin^n(x)+\cos^n(x)}\, dx.$$

Calculer $\mathrm{I}_n + \mathrm{J}_n$, montrer que $\mathrm{I}_n = \mathrm{J}_n$ (par un changement de variable affine) et en déduire I_n et J_n.

19

Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

$u_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{k(n-k)}$. (on pourra poser $x = \sin^2(t)$ pour calculer l'intégrale obtenue).

Fonction définie par une intégrale

20

1. Soit $x \in \left[e^e\,;+\infty\right]$. Calculer :

$$\mathrm{I}_1(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} \quad \mathrm{J}_1(x) = \int_e^x \frac{dt}{t\ln(t)} \quad \mathrm{K}(x) = \int_{e^e}^x \frac{dt}{t\ln(t)\ln\left(\ln(t)\right)}.$$

Déterminer les limites lorsque x tend vers $+\infty$.

2. Soient $\alpha \in]0\,;+\infty[$ et $x \in [\mathrm{e}\,;+\infty[$. On pose

$$\mathrm{I}_\alpha(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \quad \text{et} \quad \mathrm{J}_\alpha(x) = \int_{\mathrm{e}}^x \frac{\mathrm{d}t}{t\,(\ln(t))^\alpha}.$$

Pour quelles valeurs α, $\mathrm{I}_\alpha(x)$ admet-il une limite quand x tend vers $+\infty$? Qu'en est-il alors de $\mathrm{J}_\alpha(x)$?

21

Déterminer l'ensemble de définition et calculer la dérivée de la fonction

$$f : x \longmapsto \int_{1-x^2}^{1+x^2} \ln(t)\,\mathrm{d}t$$

(on n'utilisera pas de formule explicite d'une primitive de la fonction $\ln$)

22

Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ par :

$$f(x) = \int_0^{\frac{1+\tan(x)}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{2t^2-2t+1}.$$

1. Montrer que f est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ puis que f est une fonction affine.

2. En déduire que

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{2x^2-2x+1} = \frac{\pi}{2}.$$

23

Soient f une fonction définie et continue sur $[0\,;+\infty[$ et G la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$\mathrm{G}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t & \text{si } x > 0 \\ f(0) & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que G est continue en 0.

2. Montrer que G est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et calculer $\mathrm{G}'(x)$ pour $x > 0$.

Chapitre 7

Nombres complexes

I Quelques rappels

1. Définition

Définition

Un nombre complexe est un élément de la forme $x+\mathrm{i}y$ où x et y sont des réels et i est un nombre complexe tel que $\mathrm{i}^2=-1$.
L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

- l'écriture $x+\mathrm{i}y$ est appelée la forme algébrique de z;
- x est la partie réelle de z et on note $\mathrm{Re}(z)=x$;
- y est la partie imaginaire de z, on note $\mathrm{Im}(z)=y$.

Remarque :

- $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$ sont des réels.
- lorsque $\mathrm{Re}(z)=0$ on dit que z est un imaginaire pur.
- lorsque $\mathrm{Im}(z)=0$, z est un réel.
- $z=z' \iff \mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z)=\mathrm{Im}(z')$.

2. Conjugué d'un nombre complexe

Définition

On appelle conjugué du nombre complexe $z=x+\mathrm{i}y$ où x et y sont des réels, le nombre complexe noté $\overline{z}$ tel que $\overline{z}=x-\mathrm{i}y$.

Propriété

Soit $(z,z')\in\mathbb{C}^2$.

- $z+\overline{z}=2\mathrm{Re}(z)$ et $z-\overline{z}=2\mathrm{i}\times\mathrm{Im}(z)$;
- $z\in\mathbb{R} \iff z=\overline{z}$;
- z imaginaire pur $\iff \overline{z}=-z$;

Propriété

Soit $(z,z') \in \mathbb{C}^2$.

- $\overline{z+z'} = \overline{z}+\overline{z'}$;
- $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$;
- si $z \neq 0$ alors $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$;
- si $z' \neq 0$ alors $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$;
- $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$.

3. Module d'un nombre complexe

Définition

On appelle module d'un nombre complexe $z = x+\mathrm{i}y$ le réel positif, noté $|z|$, tel que

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Propriété

Soit $(z,z') \in \mathbb{C}^2$.

- $|z|^2 = z\overline{z}$ ou $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$;
- $|z| = 0 \iff z = 0$;
- $|z| = |\overline{z}| = |-z| = |-\overline{z}|$;
- $|zz'| = |z||z'|$;
- si $z' \neq 0$ alors $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$;
- $\forall n \in \mathbb{Z}$, $|z^n| = |z|^n$.

Théorème

$$\forall (z;z') \in \mathbb{C}^2,\ \big||z|-|z'|\big| \leqslant |z+z'| \leqslant |z|+|z'|.$$

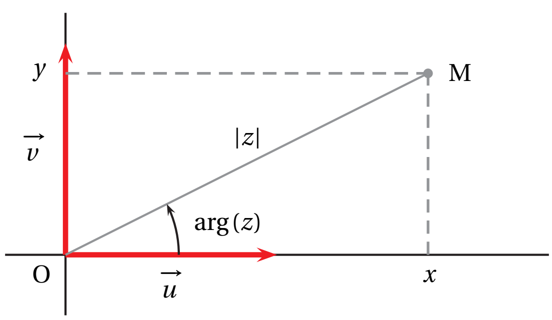
4. Forme trigonométrique et notation exponentielle d'un nombre complexe non nul

(a) Argument d'un nombre complexe non nul

Définition

Soit $z = x+\mathrm{i}y$ un nombre complexe non **nul** et $\mathrm{M}(x;y)$ son image dans le plan muni du repère orthonormé $\left(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v}\right)$.
On appelle argument du nombre complexe non nul z, et on note $\arg(z)$, toute mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{OM}})$.

Illustration :



Propriété

Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

- $z \in]0;+\infty[$ si, et seulement si, $\arg(z) = 0 \ (2\pi)$;
- $z \in]-\infty;0[$ si, et seulement si, $\arg(z) = \pi \ (2\pi)$;
- z est un imaginaire pur et $\operatorname{Im}(z) > 0$ si, et seulement si, $\arg(z) = \dfrac{\pi}{2} \ (2\pi)$;
- z est un imaginaire pur et $\operatorname{Im}(z) < 0$ si, et seulement si, $\arg(z) = -\dfrac{\pi}{2} \ (2\pi)$.

Propriété

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls.

- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \ (2\pi)$;
- $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z) \ (2\pi)$;
- $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \ (2\pi)$;
- Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $\arg(z^n) = n\arg(z) \ (2\pi)$.

Propriété

Soit $z = x + \mathrm{i}y$ un nombre complexe non nul et θ un réel. θ est un argument de z si et seulement si :

$$\cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

On a alors

$$z = |z|\big(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)\big).$$

Remarque : $|z|\big(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)\big)$ est appelée la forme trigonométrique de z.

(b) Notation exponentielle

On note

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta).$$

Ainsi, tout nombre complexe non nul peut s'écrire sous la forme exponentielle

$$z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \quad \text{où} \quad r = |z|.$$

En résumé

Soit z un nombre complexe non nul dont le module est r et dont un argument est θ.

Forme algébrique :

$$z = x + \mathrm{i}y$$

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$$

Forme trigonométrique :

$$z = r\big(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)\big) = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} = |z| \\ \cos(\theta) = \dfrac{x}{r} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \dfrac{y}{r} \end{cases}$$

Proposition

Pour tout $r>0$, $r'>0$, $\theta\in\mathbb{R}$ et $\theta'\in\mathbb{R}$ on a :

- $r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\times r'\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}=rr'\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}$;
- $\dfrac{r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{r'\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}}=\dfrac{r}{r'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\theta')}$;
- $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}=\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$.

Théorème — formule de de Moivre

Pour tous $\theta\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{Z}$, on a :

$$\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n=\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta},$$

c'est à dire,

$$\left(\cos(\theta)+\mathrm{i}\sin(\theta)\right)^n=\cos(n\theta)+\mathrm{i}\sin(n\theta).$$

Théorème — formules d'Euler

Pour tout $\theta\in\mathbb{R}$,

$$\cos(\theta)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}\quad\text{et}\quad\sin(\theta)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}.$$

II Applications en trigonométrie

1. Linéarisation

Linéariser une expression trigonométrique revient à l'exprimer à l'aide d'une combinaison linéaire de termes de la forme $\sin(px)$ et $\cos(qx)$ où p et q sont des entiers.

Exemple 1 :

- Linéarisation de $\cos(x)\sin^2(x)$:

- Linéarisation de $\cos^3(x)$:

- Deux linéarisations déjà connues :

2. Calcul de $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$

On utilise la formule de de Moivre : pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\cos(nx) + \mathrm{i}\sin(nx) = \left(\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)\right)^n.$$

Exemple 2 : Expression de $\cos(4x)$ et $\sin(4x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$:

3. Retour sur les formules de trigonométrie

(a) Formules d'addition

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

(b) Transformation somme / produit

De la même manière, en travaillant avec $e^{ip} - e^{iq}$, on obtient :

4. Calcul de $\sum_{k=0}^{n} \cos(a+kb)$ et $\sum_{k=0}^{n} \sin(a+kb)$

$\sum_{k=0}^{n} \cos(a+kb)$ et $\sum_{k=0}^{n} \sin(a+kb)$ sont les parties réelles et imaginaires de $S = \sum_{k=0}^{n} e^{i(a+kb)} = \sum_{k=0}^{n} e^{ia}\left(e^{ib}\right)^k$.

$\sum_{k=0}^{n} e^{ia}\left(e^{ib}\right)^k$ est la somme des $n+1$ premiers termes de la suite géométrique de premier terme e^{ia} et de raison e^{ib}.

- Premier cas $b = 0 \ (2\pi)$:

- Deuxième cas $b \neq 0 \ (2\pi)$:

Exemple 3 : Calcul de $S(x) = \sum_{k=5}^{15} \cos(kx)$:

5. Factorisation de $a\cos(x) + b\sin(x)$, $(a,b) \neq (0,0)$

Exemple 4 : Résolution de l'équation $-\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = \sqrt{3}$ dans $\mathbb{R}$:

III Racine n-ième d'un nombre complexe, équations dans $\mathbb{C}$

1. Racine n-ième d'un nombre complexe

(a) Racine n-ième de l'unité

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle racine n-ième de l'unité tout nombre complexe z vérifiant $z^n = 1$.

Théorème

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe n racines n-ième de l'unité, ce sont les nombres complexes

$$\zeta_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\frac{2\pi}{n}}, \quad k \in [\![0;n-1]\!].$$

Démonstration :

$\square$

Exemple 1 : Les racines cubiques de l'unité vérifient l'équation

(b) Racine n-ième d'un nombre complexe

Définition

Soit $Z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle racine n-ième de Z tout nombre complexe z vérifiant

$$z^n = Z.$$

Proposition

Soit $Z \in \mathbb{C}^*$ un nombre complexe dont la forme trigonométrique est $Z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.
Z admet n racines n-ième, ce sont les nombres complexes

$$z_k = r^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\theta}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)} = r^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{n}}\zeta_k, \quad k \in [\![0;n-1]\!].$$

Remarque : si $Z = 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $z^n = 0$ admet une unique solution : $z = 0$.

Démonstration :

$\square$

2. Cas particulier de la racine carrée

La méthode précédente suppose qu'on a réussi à écrire Z sous forme trigonométrique ce qui n'est pas toujours possible. Dans le cas de l'extraction des racines carrées, travailler avec la forme algébrique permet dans tous les cas d'obtenir le résultat.

Résolvons l'équation $z^2 = Z$.

Remarquons tout d'abord que, si $Z \neq 0,$ l'équation possède deux solutions dont l'une est l'opposée de l'autre.
Effectivement, si $\delta^2 = Z$ alors $(-\delta)^2 = Z$.

Posons $z = x + iy$ et $Z = X + iY$.

Exemple 2 : Racines carrées de $Z = -5 + 12i$.

3. Équation du second degré

Soit l'équation $az^2 + bz + c = 0$ avec a, b et c des nombres complexes, $a \neq 0$.

Théorème

Soit l'équation $az^2 + bz + c = 0$ avec $a \neq 0$. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta = 0$, l'équation admet une unique solution $z_0 = -\dfrac{b}{2a}$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$, $az^2 + bz + c = a(z - z_0)^2$.
- Si $\Delta \neq 0$, l'équation admet deux solutions distinctes
$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$$
où $\delta \in \mathbb{C}$ vérifie $\delta^2 = \Delta$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a alors $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.

Exemple 3 : Résolvons l'équation $9z^2 + 3\mathrm{i}z + 1 - 3\mathrm{i} = 0$.

IV Nombre complexe et géométrie plane

1. Interprétation géométrique du quotient $\dfrac{d-c}{b-a}$

Soient $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ et $D(d)$ quatre points du plan complexe tels que $A \neq B$ et $C \neq D$.

Propriété

Soient $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ et $D(d)$ tels que $A \neq B$ et $C \neq D$.

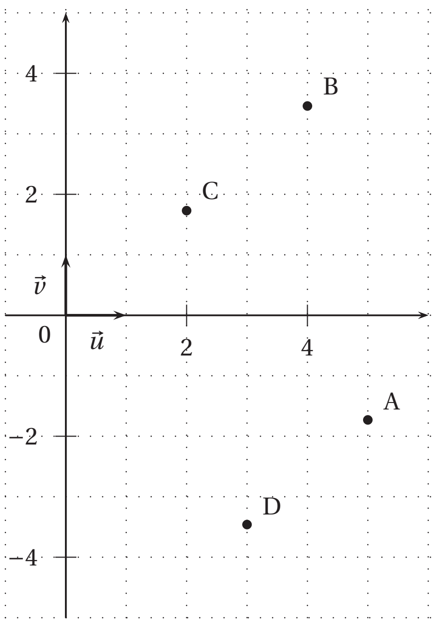
- $\dfrac{CD}{AB} = \left|\dfrac{d-c}{b-a}\right|$;
- $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\dfrac{d-c}{b-a}\right)$ (2π).

Exemple 1 :

Soient $A(5-i\sqrt{3})$, $B(4+2i\sqrt{3})$, $C(2+i\sqrt{3})$ et $D(3-2i\sqrt{3})$ quatre points du plan complexe.

1. Quelle est la nature du quadrilatère OCAD ?

2. Soit K d'affixe $k = \dfrac{2}{3}(5-i\sqrt{3})$. Que peut-on dire des points D, K et B ?



2. Écriture complexe de transformations

(a) Translation

- M' est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{t}$ signifie que $\overrightarrow{MM'} = \vec{t}$.
- Avec les complexes : soit a l'affixe de $\vec{t}$, z et z' celles de M et M'.

Propriété

$z' = z + a$ est l'écriture complexe de la translation de vecteur $\vec{t}$.

(b) Rotation

- Soit Ω un point du plan et θ un réel.
  L'image de M par $r_{\Omega,\theta}$, la rotation de centre Ω et d'angle θ, est le point M' tel que :
  - si $M = \Omega$ alors $M' = M = \Omega$;
  - si $M \neq \Omega$ alors $\Omega M = \Omega M'$ et $(\overrightarrow{\Omega M}\,;\overrightarrow{\Omega M'}) = \theta\ (2\pi)$.
- Avec les complexes : soit ω l'affixe de Ω, z et z' celles de M et M'.

Remarque :
Si $z = \omega$ on a bien $z' - \omega = 0$ *i.e.* $z' = \omega$, donc la formule $z' = \omega + (z - \omega)\,e^{i\theta}$ inclut les deux cas.

Propriété

$z' = \omega + (z - \omega)\,e^{i\theta}$ est l'écriture complexe de la rotation de centre Ω et d'angle θ.

(c) Homothétie

- Soit $k \neq 0$, Ω et M des points du plan. M' est l'image de M par l'homothétie de centre Ω et de rapport k signifie que $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$.
- Avec les complexes : soit ω l'affixe de Ω, z et z' celles de M et M'.

Propriété

$z' - \omega = k\,(z - \omega)$ est l'écriture complexe de l'homothétie de centre $\Omega\,(\omega)$ et de rapport k.

Modules et arguments

1

Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

1. $\dfrac{i-8}{1+7i}+\dfrac{1-i}{1+i}$;
2. $(1+i)^5$;
3. $\dfrac{3+2i}{7+4i}$.

2

Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

1. $\dfrac{1}{1-i}$;
2. $\dfrac{(\sqrt{6}-i\sqrt{2})(1+i)}{1-i}$;
3. $1+i\tan(\theta)$, $\theta\in\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$;
4. $1+i\tan(\theta)$, $\theta\in\left]\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right[$;
5. $\dfrac{1-e^{i\theta}}{1+e^{-i\theta}}$, $\theta\in\,]0;\pi[$.

3

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes de module 1. Montrer que le nombre $\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ est réel.

Applications en trigonométrie

4

Soit $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$. Calculer, pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos(kx)}{\cos^k(x)}\quad\text{et}\quad\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin(kx)}{\cos^k(x)}.$$

5

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(kx)$.

6

1. Linéariser $\sin^5(\theta)$ et $\cos^4(\theta)$.
2. Exprimer $\cos(6\theta)$ en fonction de puissances de $\cos(\theta)$.

7

Calculer $S=\cos\left(\dfrac{\pi}{11}\right)+\cos\left(\dfrac{3\pi}{11}\right)+\cos\left(\dfrac{5\pi}{11}\right)+\cos\left(\dfrac{7\pi}{11}\right)+\cos\left(\dfrac{9\pi}{11}\right)$.

8

1. Exprimer $\cos(5\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$.
2. En déduire $\cos\left(\dfrac{\pi}{10}\right)$ et $\cos\left(\dfrac{3\pi}{10}\right)$.

9

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\cos(x)-\sin(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;
2. $\cos(2x)-2\sqrt{3}\sin(2x)=2\cos(x)$;
3. $\sqrt{3}\sin(2x)=2\cos^2(x)$;
4. $\sqrt{3}\cos^2(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\sin(x)\cos(x)$.

Racines n-ième

10

Montrer que pour tout entier naturel n, $n\geqslant 2$, la somme des racines n-ième de l'unité est nulle.

11

Pour tout entier naturel n, $n\geqslant 2$, calculer le produit des racines n-ième de l'unité.

12

1. Déterminer les racines cubiques de $-i$.
2. Déterminer les racines cinquième de $-i$.
3. Déterminer les racines sixième de $-\dfrac{4}{1+i\sqrt{3}}$.

13

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z+i)^7+(z-i)^7=0$ et exprimer simplement les solutions à l'aide des fonctions sinus et cosinus.

14

Résoudre $z^2=-7+24i$.

15

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$.

1. $z^2-2iz-1+2i=0$.
2. $iz^2+iz+1+i=0$.

16

1. Trouver les solutions de l'équation

$$\text{(E)}\quad z^4+z^3+z^2+z+1=0.$$

2. Montrer que si z est solution de (E) alors $x=z+\dfrac{1}{z}$ vérifie une équation simple que l'on déterminera.
3. En déduire une expression algébrique de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.

Nombres complexes et géométrie

17

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On prendra 2 cm pour unité graphique.

On considère l'application F du plan dans lui même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M′ d'affixe z' tel que :

$$z' = (1+i)z + 2.$$

1. Soit A le point d'affixe $-2+2i$.
Déterminer les affixes des points A′ et B vérifiant respectivement A′ = F(A) et F(B) = A.

2. Méthode de construction de l'image de M.

(a) Montrer qu'il existe un point confondu avec son image. On notera Ω ce point et ω son affixe.

(b) Établir que pour tout complexe z distinct de ω, $\dfrac{z'-z}{\omega - z} = -i$.

(c) Soit M un point distinct de Ω.
Comparer MM′ et MΩ et déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MM'})$.

(d) En déduire une méthode de construction de M′ à partir de M.

3. Étude de l'image d'un ensemble de points.

(a) Donner la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble Γ, des points du plan dont l'affixe z vérifie $|z+2-2i| = \sqrt{2}$.
Vérifier que B est un point de Γ.

(b) Démontrer que, pour tout z élément de $\mathbb{C}$

$$z' + 2 = (1+i)(z+2-2i).$$

(c) Démontrer que l'image par F de tout point de Γ appartient au cercle Γ' de centre A′ et de rayon 2.

18

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, (unité graphique 2 cm).
On considère les points I et A d'affixe respectives 1 et −2. Le point K est le milieu du segment [IA].
On appelle $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre [IA]. Faire une figure et la compléter au fur et à mesure.

1. Soit B le point d'affixe $b = \dfrac{1+4i}{1-2i}$. Écrire b sous forme algébrique et montrer que B appartient au cercle $\mathcal{C}$.

2. Soit D le point du cercle $\mathcal{C}$ tel que l'angle $\left(\overrightarrow{KI}, \overrightarrow{KD}\right) = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ où k est un entier relatif et soit d l'affixe de D.

(a) Quel est le module de $d + \dfrac{1}{2}$? Donner un argument de $d + \dfrac{1}{2}$.

(b) En déduire que $d = \dfrac{1}{4} + 3i\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

(c) Déterminer un réel a vérifiant l'égalité

$$\frac{1+2ia}{1-ia} = \frac{1}{4} + 3i\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

3. Soit x un réel non nul et M le point d'affixe $m = \dfrac{1+2ix}{1-ix}$. On pose $Z = \dfrac{(m-1)}{(m+2)}$. Calculer Z et en déduire la nature du triangle AIM.

4. Soit N un point différent de A du cercle $\mathcal{C}$ et n son affixe.
Démontrer qu'il existe un réel y tel que $n = \dfrac{1+2iy}{1-iy}$.

19

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique 4 cm. Dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, i désigne le nombre de module 1, et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
On appelle f l'application, qui, à tout nombre complexe z différent de $-2i$, associe

$$Z = f(z) = \frac{z-2+i}{z+2i}.$$

1. Si $z = x+iy$, x et y étant deux réels, exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et de y.
On vérifiera que $\text{Re}(Z) = \dfrac{x^2+y^2-2x+3y+2}{x^2+(y+2)^2}$.
En déduire la nature de :

(a) l'ensemble E des points M d'affixe z, tels que Z soit un réel ;

(b) l'ensemble F des points M d'affixe z du plan, tels que Z soit un imaginaire pur éventuellement nul.

(c) Représenter ces deux ensembles.

2. Calculer $|f(z)-1| \times |z+2i|$.
Déterminer l'ensemble des points M′ d'affixe Z, lorsque le point M d'affixe z parcourt le cercle de centre Ω d'affixe $-2i$ et de rayon $\sqrt{5}$.

20

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, et C d'affixes respectives $a = -1+2i$, $b = 1+3i$, $c = 4i$.

1. Montrer que le triangle ABC est isocèle en A.

2. Soit I le milieu de [BC] et z_I son affixe.

(a) Quel est l'ensemble des points M du plan distincts de A dont l'affixe z est telle que $\dfrac{z-z_I}{z-a}$ soit un réel ?

(b) Déterminer l'unique réel x tel que $\dfrac{x-z_I}{x-a}$ soit un réel.

(c) Soit $z_{\overrightarrow{AI}}$ l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AI}$, donner une forme trigonométrique de $z_{\overrightarrow{AI}}$.

3. (a) Soit G le point d'affixe −3. Montrer qu'il existe deux rotations de centre G, dont on déterminera les angles, telles que les images de A et I par ces rotations soient toutes deux sur l'axe des réels.

(b) Soit r_1 la rotation de centre G et d'angle de mesure $-\dfrac{\pi}{4}$.
Déterminer l'écriture complexe de r_1.

4. Soit A′, B′ et C′ les images respectives de A, B, et C par la rotation r_1 et soient a', b', et c' leurs affixes.
Quelle est l'image par r_1 de l'axe de symétrie du triangle ABC ?
En déduire que $b' = \overline{c'}$.

21

$(O; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormal du plan $\mathcal{P}$.
Soit A le point d'affixe 1 et B le point d'affixe -1.
Soit F l'application de $\mathcal{P}$ privé de O dans $\mathcal{P}$ qui à tout point M d'affixe z distinct de O associe le point $M' = F(M)$ d'affixe $z' = \dfrac{-1}{\overline{z}}$.

1. (a) Soit E le point d'affixe $e^{i\frac{\pi}{3}}$; on appelle E' son image par F. Déterminer l'affixe de E' sous forme exponentielle, puis sous forme algébrique.

(b) On note $\mathcal{C}_1$ le cercle de centre O et de rayon 1. Déterminer l'image de $\mathcal{C}_1$ par l'application F (on pourra utiliser l'équation paramétrique de $\mathcal{C}_1$, c'est à dire une équation de la forme $z = \omega + r e^{i\theta}$, $\theta \in]-\pi;\pi]$ où ω est l'affixe du centre et r le rayon).

2. (a) Soit K le point d'affixe $2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ et K' l'image de K par F. Calculer l'affixe de K'.

(b) Soit $\mathcal{C}_2$ le cercle de centre O et de rayon 2. Déterminer l'image de $\mathcal{C}_2$ par l'application F.

3. On désigne par R un point d'affixe $r = 1+e^{i\theta}$ où $\theta \in]-\pi\ ;\ \pi[$. R appartient au cercle $\mathcal{C}_3$ de centre A et de rayon 1 et on note $R'(r')$ l'image de R par F.

(a) Montrer que $r' + 1 = \dfrac{\overline{r} - 1}{\overline{r}}$.
En déduire que : $|r' + 1| = |r'|$.

(b) Si on considère les points d'affixe $1 + e^{i\theta}$ où $\theta \in]-\pi\ ;\ \pi[$, montrer que leurs images sont situées sur une droite. On pourra utiliser le résultat du **a.**.