

## Annales 2011-2015 : algorithmique

# Fonctions

## EXERCICE 1 correction Centres Étrangers 2014

Commun à tous les candidats

Les parties A et B sont indépendantes

Une image numérique en noir et blanc est composée de petits carrés (pixels) dont la couleur va du blanc au noir en passant par toutes les nuances de gris. Chaque nuance est codée par un réel  $x$  de la façon suivante :

- $x = 0$  pour le blanc ;
- $x = 1$  pour le noir ;
- $x = 0,01; x = 0,02$  et ainsi de suite jusqu'à  $x = 0,99$  par pas de  $0,01$  pour toutes les nuances intermédiaires (du clair au foncé).

L'image A, ci-après, est composée de quatre pixels et donne un échantillon de ces nuances avec leurs codes.

Un logiciel de retouche d'image utilise des fonctions numériques dites « fonctions de retouche ». Une fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0; 1]$  est dite « fonction de retouche » si elle possède les quatre propriétés suivantes :

- $f(0) = 0$  ;
- $f(1) = 1$  ;
- $f$  est continue sur l'intervalle  $[0; 1]$  ;
- $f$  est croissante sur l'intervalle  $[0; 1]$ .

Une nuance codée  $x$  est dite assombrie par la fonction  $f$  si  $f(x) > x$ , et éclaircie, si  $f(x) < x$ . Ainsi, si  $f(x) = x^2$ , un pixel de nuance codée  $0,2$  prendra la nuance codée  $0,2^2 = 0,04$ . L'image A sera transformée en l'image B ci-dessous.

Si  $f(x) = \sqrt{x}$ , la nuance codée  $0,2$  prendra la nuance codée  $\sqrt{0,2} \approx 0,45$ . L'image A sera transformée en l'image C ci-dessous.

0,20	0,40
0,60	0,80

Image A

0,04	0,16
0,36	0,64

Image B

0,45	0,63
0,77	0,89

Image C

### Partie A

1. On considère la fonction  $f_1$  définie sur l'intervalle  $[0; 1]$  par :

$$f_1(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x.$$

- (a) Démontrer que la fonction  $f_1$  est une fonction de retouche.
- (b) Résoudre graphiquement l'inéquation  $f_1(x) \leq x$ , à l'aide du graphique donné en annexe, à rendre avec la copie, en faisant apparaître les pointillés utiles.

Interpréter ce résultat en termes d'éclaircissement ou d'assombrissement.

2. On considère la fonction  $f_2$  définie sur l'intervalle  $[0; 1]$  par :

$$f_2(x) = \ln[1 + (e - 1)x].$$

On admet que  $f_2$  est une fonction de retouche.

On définit sur l'intervalle  $[0; 1]$  la fonction  $g$  par :  $g(x) = f_2(x) - x$ .

- (a) Établir que, pour tout  $x$  de l'intervalle  $[0; 1]$  :  $g'(x) = \frac{(e-2) - (e-1)x}{1 + (e-1)x}$  ;

(b) Déterminer les variations de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $[0; 1]$ .

Démontrer que la fonction  $g$  admet un maximum en  $\frac{e-2}{e-1}$ , maximum dont une valeur arrondie au centième est 0,12.

(c) Établir que l'équation  $g(x) = 0,05$  admet sur l'intervalle  $[0; 1]$  deux solutions  $\alpha$  et  $\beta$ , avec  $\alpha < \beta$ .

On admettra que :  $0,08 < \alpha < 0,09$  et que :  $0,85 < \beta < 0,86$ .

## Partie B

On remarque qu'une modification de nuance n'est perceptible visuellement que si la valeur absolue de l'écart entre le code de la nuance initiale et le code de la nuance modifiée est supérieure ou égale à 0,05.

1. Dans l'algorithme décrit ci-dessous,  $f$  désigne une fonction de retouche.

Quel est le rôle de cet algorithme ?

<b>Variables :</b>	$x$ (nuance initiale) $y$ (nuance retouchée) $E$ (écart) $c$ (compteur) $k$
<b>Initialisation :</b>	$c$ prend la valeur 0
<b>Traitement :</b>	Pour $k$ allant de 0 à 100, faire $x$ prend la valeur $\frac{k}{100}$ $y$ prend la valeur $f(x)$ $E$ prend la valeur $ y - x $ Si $E \geq 0,05$ , faire $c$ prend la valeur $c + 1$ Fin si Fin pour
<b>Sortie :</b>	Afficher $c$

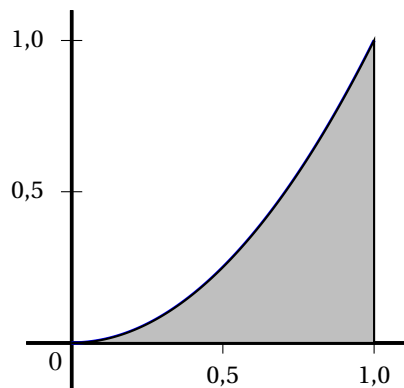
2. Quelle valeur affichera cet algorithme si on l'applique à la fonction  $f_2$  définie dans la deuxième question de la **partie A** ?

## Partie C

Dans cette partie, on s'intéresse à des fonctions de retouche  $f$  dont l'effet est d'éclaircir l'image dans sa globalité, c'est-à-dire telles que, pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0; 1]$ ,  $f(x) \leq x$ .

On décide de mesurer l'éclaircissement global de l'image en calculant l'aire  $\mathcal{A}_f$  de la portion de plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction  $f$ , et les droites d'équations respectives  $x = 0$  et  $x = 1$ .

Entre deux fonctions, celle qui aura pour effet d'éclaircir le plus l'image sera celle correspondant à la plus petite aire. On désire comparer l'effet des deux fonctions suivantes, dont on admet qu'elles sont des fonctions de retouche :

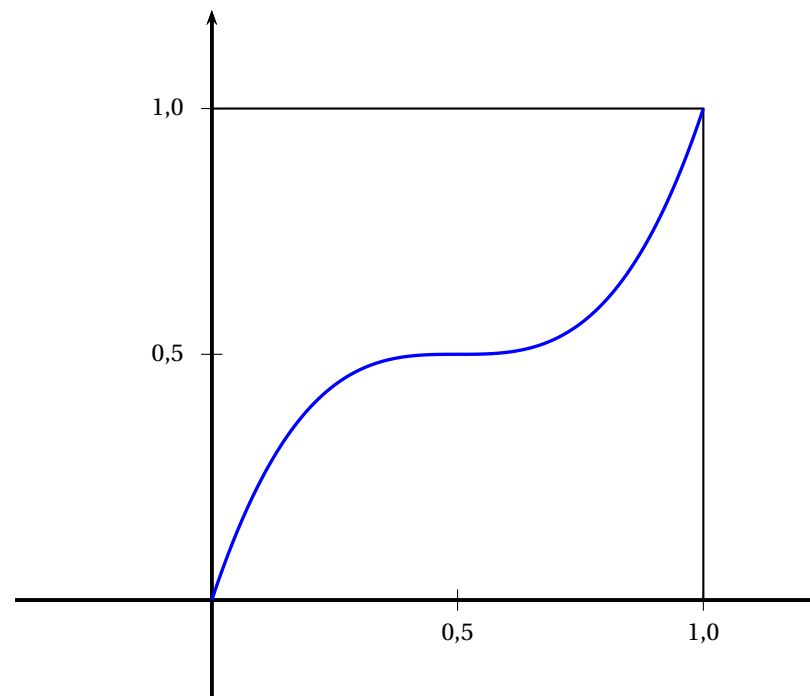


$$f_1(x) = xe^{(x^2-1)} \quad f_2(x) = 4x - 15 + \frac{60}{x+4}$$

1. (a) Calculer  $\mathcal{A}_{f_1}$ .

(b) Calculer  $\mathcal{A}_{f_2}$

2. De ces deux fonctions, laquelle a pour effet d'éclaircir le plus l'image ?



Annexe

Courbe représentative de la fonction  $f_1$

# Suites

## EXERCICE 2 correction Asie 2012

Commun à tous les candidats

1. On considère l'algorithme suivant :

<b>Entrée</b>	Saisir un réel strictement positif non nul $a$ Saisir un réel strictement positif non nul $b$ ( $b > a$ ) Saisir un entier naturel non nul $N$
<b>Initialisation</b>	Affecter à $u$ la valeur $a$ Affecter à $v$ la valeur $b$ Affecter à $n$ la valeur $0$
<b>Traitement</b>	TANT QUE $n < N$ Affecter à $n$ la valeur $n + 1$ Affecter à $u$ la valeur $\frac{a + b}{2}$ Affecter à $v$ la valeur $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$ Affecter à $a$ la valeur $u$ Affecter à $b$ la valeur $v$
<b>Sortie</b>	Afficher $u$ , afficher $v$

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour  $a = 4$ ,  $b = 9$  et  $N = 2$ . Les valeurs successives de  $u$  et  $v$  seront arrondies au millième.

$n$	$a$	$b$	$u$	$v$
0	4	9		
1				
2				

Dans la suite,  $a$  et  $b$  sont deux réels tels que  $0 < a < b$ .

On considère les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies par :

$u_0 = a, v_0 = b$  et, pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2 + v_n^2}{2}}$$

2. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_n > 0$  et  $v_n > 0$ .

(b) Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$  :  $v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \left(\frac{u_n - v_n}{2}\right)^2$ .

En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $u_n \leq v_n$ .

3. (a) Démontrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.

(b) Comparer  $v_{n+1}^2$  et  $v_n^2$ . En déduire le sens de variation de la suite  $(v_n)$ .

4. Démontrer que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont convergentes.

**EXERCICE 3** correction **Métropole 2012**

**Commun à tous les candidats**

*Il est possible de traiter la partie C sans avoir traité la partie B.*

**Partie A**

On désigne par  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[1 ; +\infty[$  par

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

1. Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .
2. Démontrer que pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[1 ; +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{1}{x(x+1)^2}$ .  
Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$ .
3. En déduire le signe de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[1 ; +\infty[$ .

**Partie B**

Soit  $(u_n)$  la suite définie pour tout entier strictement positif par

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	$i$ et $n$ sont des entiers naturels. $u$ est un réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de $n$ .
Initialisation :	Affecter à $u$ la valeur 0.
Traitement :	Pour $i$ variant de 1 à $n$ .   Affecter à $u$ la valeur $u + \frac{1}{i}$
Sortie :	Afficher $u$ .

Donner la valeur exacte affichée par cet algorithme lorsque l'utilisateur entre la valeur  $n = 3$ .

2. Recopier et compléter l'algorithme précédent afin qu'il affiche la valeur de  $u_n$  lorsque l'utilisateur entre la valeur de  $n$ .
3. Voici les résultats fournis par l'algorithme modifié, arrondis à  $10^{-3}$ .

$n$	4	5	6	7	8	9	10	100	1 000	1 500	2 000
$u_n$	0,697	0,674	0,658	0,647	0,638	0,632	0,626	0,582	0,578	0,578	0,577

À l'aide de ce tableau, formuler des conjectures sur le sens de variation de la suite  $(u_n)$  et son éventuelle convergence.

**Partie C**

Cette partie peut être traitée indépendamment de la partie B.

Elle permet de démontrer les conjectures formulées à propos de la suite  $(u_n)$  telle que pour tout entier strictement positif  $n$ ,

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

1. Démontrer que pour tout entier strictement positif  $n$ ,

$$u_{n+1} - u_n = f(n)$$

où  $f$  est la fonction définie dans la partie A.

En déduire le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .

2. (a) Soit  $k$  un entier strictement positif.

Justifier l'inégalité  $\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x}\right) dx \geq 0$ .

En déduire que  $\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$ .

Démontrer l'inégalité  $\ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$  (1).

(b) Écrire l'inégalité (1) en remplaçant successivement  $k$  par  $1, 2, \dots, n$  et démontrer que pour tout entier strictement positif  $n$ ,

$$\ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

(c) En déduire que pour tout entier strictement positif  $n$ ,  $u_n \geq 0$ .

3. Prouver que la suite  $(u_n)$  est convergente. On ne demande pas de calculer sa limite.

**EXERCICE 4** correction **Métropole septembre 2012****Commun à tous les candidats**L'objet de cet exercice est d'étudier la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par

$$u_0 = 3 \quad \text{et pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{7}{u_n} \right) \quad (\star)$$

On pourra utiliser sans démonstration le fait que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n > 0$ .1. On désigne par  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par

$$f(x) = \frac{1}{2} \left( x + \frac{7}{x} \right).$$

Démontrer que la fonction  $f$  admet un minimum.En déduire que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \geq \sqrt{7}$ .2. (a) Soit  $n$  un entier naturel quelconque.Étudier le signe de  $u_{n+1} - u_n$ .(b) Pourquoi peut-on en déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente ?(c) On déduit de la relation  $(\star)$  que la limite  $\ell$  de cette suite est telle que  $\ell = \frac{1}{2} \left( \ell + \frac{7}{\ell} \right)$ .Déterminer  $\ell$ .3. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} - \sqrt{7} = \frac{1}{2} \frac{(u_n - \sqrt{7})^2}{u_n}$ .4. On définit la suite  $(d_n)$  par :

$$d_0 = 1 \quad \text{et pour tout entier naturel } n, d_{n+1} = \frac{1}{2} d_n^2.$$

(a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_n - \sqrt{7} \leq d_n.$$

(b) Voici un algorithme :

Variables :	$n$ et $p$ sont des entiers naturels $d$ est un réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de $p$ .
Initialisations :	Affecter à $d$ la valeur 1. Affecter à $n$ la valeur 0
Traitement :	Tant que $d > 10^{-p}$ .   Affecter à $d$ la valeur $0,5d^2$   Affecter à $n$ la valeur $n + 1$ .
Sortie :	Afficher $n$ .

En entrant la valeur 9, l'algorithme affiche le nombre 5.

Quelle inégalité peut-on en déduire pour  $d_5$  ?Justifier que  $u_5$  est une valeur approchée de  $\sqrt{7}$  à  $10^{-9}$  près.

**EXERCICE 5**

correction

Polynésie 2012

**Partie A**

On considère l'algorithme suivant :

Les variables sont le réel  $U$  et les entiers naturels  $k$  et  $N$ .

**Entrée**

Saisir le nombre entier naturel non nul  $N$ .

**Traitement**

Affecter à  $U$  la valeur 0

Pour  $k$  allant de 0 à  $N-1$

Affecter à  $U$  la valeur  $3U - 2k + 3$

Fin pour

**Sortie**

Afficher  $U$

Quel est l'affichage en sortie lorsque  $N = 3$  ?

**Partie B**

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 0$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$ .

1. Calculer  $u_1$  et  $u_2$ .

2. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \geq n$ .

(b) En déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .

3. Démontrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.

4. Soit la suite  $(v_n)$  définie, pour tout entier naturel  $n$ , par  $v_n = u_n - n + 1$ .

(a) Démontrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique.

(b) En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = 3^n + n - 1$ .

5. Soit  $p$  un entier naturel non nul.

(a) Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier  $n_0$  tel que, pour tout  $n \geq n_0$ ,  $u_n \geq 10^p$  ?

On s'intéresse maintenant au plus petit entier  $n_0$ .

(b) Justifier que  $n_0 \leq 3p$ .

(c) Déterminer à l'aide de la calculatrice cet entier  $n_0$  pour la valeur  $p = 3$ .

(d) Proposer un algorithme qui, pour une valeur de  $p$  donnée en entrée, affiche en sortie la valeur du plus petit entier  $n_0$  tel que, pour tout  $n \geq n_0$ , on ait  $u_n \geq 10^p$ .

**EXERCICE 6** correction **Asie 2013**

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

**Partie A**

On considère la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_0 = 2$  et, pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_{n+1} = \frac{1 + 3u_n}{3 + u_n}.$$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_n > 1$ .
2. (a) Établir que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_{n+1} - u_n = \frac{(1 - u_n)(1 + u_n)}{3 + u_n}$ .

(b) Déterminer le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .

En déduire que la suite  $(u_n)$  converge.

**Partie B**

On considère la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_0 = 2$  et, pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_{n+1} = \frac{1 + 0,5u_n}{0,5 + u_n}.$$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. On considère l'algorithme suivant :

Entrée	Soit un entier naturel non nul $n$
Initialisation	Affecter à $u$ la valeur 2
Traitement et sortie	POUR $i$ allant de 1 à $n$
	Affecter à $u$ la valeur $\frac{1 + 0,5u}{0,5 + u}$ Afficher $u$
	FIN POUR

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour  $n = 3$ . Les valeurs de  $u$  seront arrondies au millième.

$i$	1	2	3
$u$			

2. Pour  $n = 12$ , on a prolongé le tableau précédent et on a obtenu :

$i$	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$u$	1,008 3	0,997 3	1,000 9	0,999 7	1,000 1	0,999 97	1,000 01	0,999 996	1,000 001

Conjecturer le comportement de la suite  $(u_n)$  à l'infini.

3. On considère la suite  $(v_n)$  définie, pour tout entier naturel  $n$ , par :  $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$ .

(a) Démontrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique de raison  $-\frac{1}{3}$ .

(b) Calculer  $v_0$  puis écrire  $v_n$  en fonction de  $n$ .

4. (a) Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $v_n \neq 1$ .

(b) montrer que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}$ .

(c) Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .

**EXERCICE 7** correction Centres Étrangers 2013

**Candidats n'ayant pas choisi la spécialité mathématique**

L'objet de cet exercice est l'étude de la suite  $(u_n)$  définie par son premier terme

$$u_1 = \frac{3}{2} \text{ et la relation de récurrence : } u_{n+1} = \frac{nu_n + 1}{2(n+1)}.$$

**Partie A - Algorithmique et conjectures**

Pour calculer et afficher le terme  $u_9$  de la suite, un élève propose l'algorithme ci-contre.

Il a oublié de compléter deux lignes.

Variables	$n$ est un entier naturel $u$ est un réel
Initialisation	Affecter à $n$ la valeur 1 Affecter à $u$ la valeur 1,5
Traitement	Tant que $n < 9$ Affecter à $u$ la valeur ... Affecter à $n$ la valeur ... Fin Tant que
Sortie	Afficher la variable $u$

1. Recopier et compléter les deux lignes de l'algorithme où figurent des points de suspension.
2. Comment faudrait-il modifier cet algorithme pour qu'il calcule et affiche tous les termes de la suite de  $u_2$  jusqu'à  $u_9$  ?
3. Avec cet algorithme modifié, on a obtenu les résultats suivants, arrondis au dix-millième :

n	1	2	3	4	5	6	...	99	100
$u_n$	1,5	0,625	0,375	0,2656	0,2063	0,1693	...	0,0102	0,0101

Au vu de ces résultats, conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite  $(u_n)$ .

**Partie B - Étude mathématique**

On définit une suite auxiliaire  $(v_n)$  par : pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $v_n = nu_n - 1$ .

1. Montrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.

2. En déduire que, pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on a :  $u_n = \frac{1 + (0,5)^n}{n}$ .

3. Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .

4. Justifier que, pour tout entier  $n \geq 1$ , on a :  $u_{n+1} - u_n = -\frac{1 + (1 + 0,5n)(0,5)^n}{n(n+1)}$ .

En déduire le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .

**Partie C - Retour à l'algorithmique**

En s'inspirant de la partie A, écrire un algorithme permettant de déterminer et d'afficher le plus petit entier  $n$  tel que  $u_n < 0,001$ .

**EXERCICE 8** correction **Liban 2013**

**Candidats N'AYANT PAS SUIVI l'enseignement de spécialité**

On considère la suite numérique  $(v_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par

$$\begin{cases} v_0 &= 1 \\ v_{n+1} &= \frac{9}{6 - v_n} \end{cases}$$

**Partie A**

1. On souhaite écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel  $n$  donné, tous les termes de la suite, du rang 0 au rang  $n$ .

Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient. Préciser lequel en justifiant la réponse.

Algorithme N° 1	Algorithme N° 2	Algorithme N° 3
<p><b>Variables :</b>  <math>v</math> est un réel  <math>i</math> et <math>n</math> sont des entiers naturels</p> <p><b>Début de l'algorithme :</b>                      Lire <math>n</math>  <math>v</math> prend la valeur 1                      Pour <math>i</math> variant de 1 à <math>n</math> faire  <math>v</math> prend la valeur <math>\frac{9}{6-v}</math>                      Fin pour                      Afficher <math>v</math></p> <p><b>Fin algorithme</b></p>	<p><b>Variables :</b>  <math>v</math> est un réel  <math>i</math> et <math>n</math> sont des entiers naturels</p> <p><b>Début de l'algorithme :</b>                      Lire <math>n</math>                      Pour <math>i</math> variant de 1 à <math>n</math> faire  <math>v</math> prend la valeur 1                      Afficher <math>v</math>  <math>v</math> prend la valeur <math>\frac{9}{6-v}</math>                      Fin pour</p> <p><b>Fin algorithme</b></p>	<p><b>Variables :</b>  <math>v</math> est un réel  <math>i</math> et <math>n</math> sont des entiers naturels</p> <p><b>Début de l'algorithme :</b>                      Lire <math>n</math>  <math>v</math> prend la valeur 1                      Pour <math>i</math> variant de 1 à <math>n</math> faire                      Afficher <math>v</math>  <math>v</math> prend la valeur <math>\frac{9}{6-v}</math>                      Fin pour                      Afficher <math>v</math></p> <p><b>Fin algorithme</b></p>

2. Pour  $n = 10$  on obtient l'affichage suivant :

1	1,800	2,143	2,333	2,455	2,538	2,600	2,647	2,684	2,714
---	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Pour  $n = 100$ , les derniers termes affichés sont :

2,967	2,968	2,968	2,968	2,969	2,969	2,969	2,970	2,970	2,970
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite  $(v_n)$  ?

3. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $0 < v_n < 3$ .

(b) Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_{n+1} - v_n = \frac{(3 - v_n)^2}{6 - v_n}$ .

La suite  $(v_n)$  est-elle monotone ?

(c) Démontrer que la suite  $(v_n)$  est convergente.

**Partie B Recherche de la limite de la suite  $(v_n)$**

On considère la suite  $(w_n)$  définie pour tout  $n$  entier naturel par

$$w_n = \frac{1}{v_n - 3}$$

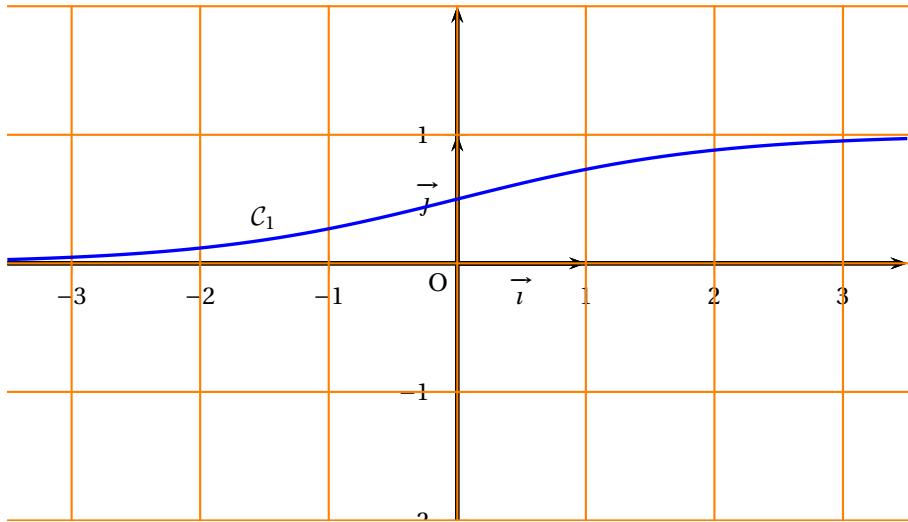
1. Démontrer que  $(w_n)$  est une suite arithmétique de raison  $-\frac{1}{3}$

2. En déduire l'expression de  $(w_n)$ , puis celle de  $(v_n)$  en fonction de  $n$ .

3. Déterminer la limite de la suite  $(v_n)$ .

**ANNEXE à rendre avec la copie**

Représentation graphique  $C_1$  de la fonction  $f_1$



**EXERCICE 9**

correction

Nouvelle Calédonie 2013

Commun à tous les candidats

Soient deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies par  $u_0 = 2$  et  $v_0 = 10$  et pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}.$$

**PARTIE A**

On considère l'algorithme suivant :

```

Variables : N est un entier
                U, V, W sont des réels
                K est un entier
Début :      Affecter 0 à K
                Affecter 2 à U
                Affecter 10 à V
                Saisir N
                Tant que K < N
                    Affecter K + 1 à K
                    Affecter U à W
                    Affecter  $\frac{2U + V}{3}$  à U
                    Affecter  $\frac{W + 3V}{4}$  à V
                Fin tant que
                Afficher U
                Afficher V
Fin
    
```

On exécute cet algorithme en saisissant  $N = 2$ . Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous donnant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme.

K	W	U	V
0			
1			
2			

**PARTIE B**

1. (a) Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{5}{12}(v_n - u_n)$ .  
 (b) Pour tout entier naturel  $n$  on pose  $w_n = v_n - u_n$ .  
 Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $w_n = 8\left(\frac{5}{12}\right)^n$ .
2. (a) Démontrer que la suite  $(u_n)$  est croissante et que la suite  $(v_n)$  est décroissante.  
 (b) Dédurre des résultats des questions 1. b. et 2. a. que pour tout entier naturel  $n$  on a  $u_n \leq 10$  et  $v_n \geq 2$ .  
 (c) En déduire que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont convergentes.
3. Montrer que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  ont la même limite.
4. Montrer que la suite  $(t_n)$  définie par  $t_n = 3u_n + 4v_n$  est constante.  
 En déduire que la limite commune des suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  est  $\frac{46}{7}$ .

**EXERCICE 10** correction Amérique du Nord 2014

**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Un volume constant de  $2\,200\text{ m}^3$  d'eau est réparti entre deux bassins A et B.

Le bassin A refroidit une machine. Pour des raisons d'équilibre thermique on crée un courant d'eau entre les deux bassins à l'aide de pompes.

On modélise les échanges entre les deux bassins de la façon suivante :

- au départ, le bassin A contient  $800\text{ m}^3$  d'eau et le bassin B contient  $1\,400\text{ m}^3$  d'eau ;
- tous les jours, 15 % du volume d'eau présent dans le bassin B au début de la journée est transféré vers le bassin A ;
- tous les jours, 10 % du volume d'eau présent dans le bassin A au début de la journée est transféré vers le bassin B.

Pour tout entier naturel  $n$ , on note :

- $a_n$  le volume d'eau, exprimé en  $\text{m}^3$ , contenu dans le bassin A à la fin du  $n$ -ième jour de fonctionnement ;
- $b_n$  le volume d'eau, exprimé en  $\text{m}^3$ , contenu dans le bassin B à la fin du  $n$ -ième jour de fonctionnement.

On a donc  $a_0 = 800$  et  $b_0 = 1\,400$ .

1. Par quelle relation entre  $a_n$  et  $b_n$  traduit-on la conservation du volume total d'eau du circuit ?
2. Justifier que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + 330$ .
3. L'algorithme ci-dessous permet de déterminer la plus petite valeur de  $n$  à partir de laquelle  $a_n$  est supérieur ou égal à 1 100.

Recopier cet algorithme en complétant les parties manquantes.

<b>Variables</b>	: $n$ est un entier naturel $a$ est un réel		
<b>Initialisation</b>	: Affecter à $n$ la valeur 0 Affecter à $a$ la valeur 800		
<b>Traitement</b>	: Tant que $a < 1\,100$ , faire : <table style="margin-left: 20px; border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 2px 5px;">Affecter à <math>a</math> la valeur ...</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 5px;">Affecter à <math>n</math> la valeur ...</td> </tr> </table> Fin Tant que	Affecter à $a$ la valeur ...	Affecter à $n$ la valeur ...
Affecter à $a$ la valeur ...			
Affecter à $n$ la valeur ...			
<b>Sortie</b>	: Afficher $n$		

4. Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $u_n = a_n - 1\,320$ .

(a) Montrer que la suite  $(u_n)$  est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

(b) Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .

En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $a_n = 1\,320 - 520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$ .

5. On cherche à savoir si, un jour donné, les deux bassins peuvent avoir, au mètre cube près, le même volume d'eau.

Proposer une méthode pour répondre à ce questionnement.

**EXERCICE 11** correction **Antilles 2014**

**Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité**

Soit la suite numérique  $(u_n)$  définie sur l'ensemble des entiers naturels  $\mathbb{N}$  par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \text{et pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3 \times 0,5^n. \end{cases}$$

1. (a) Recopier et, à l'aide de la calculatrice, compléter le tableau des valeurs de la suite  $(u_n)$  approchées à  $10^{-2}$  près :

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$u_n$	2								

(b) D'après ce tableau, énoncer une conjecture sur le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .

2. (a) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel  $n$  non nul on a

$$u_n \geq \frac{15}{4} \times 0,5^n.$$

(b) En déduire que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $u_{n+1} - u_n \leq 0$ .

(c) Démontrer que la suite  $(u_n)$  est convergente.

3. On se propose, dans cette question de déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .

Soit  $(v_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par  $v_n = u_n - 10 \times 0,5^n$ .

(a) Démontrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{5}$ . On précisera le premier terme de la suite  $(v_n)$ .

(b) En déduire, que pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_n = -8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + 10 \times 0,5^n.$$

(c) Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$

4. Recopier et compléter les lignes (1), (2) et (3) de l'algorithme suivant, afin qu'il affiche la plus petite valeur de  $n$  telle que  $u_n \leq 0,01$ .

<b>Entrée :</b>	$n$ et $u$ sont des nombres
<b>Initialisation :</b>	$n$ prend la valeur 0 $u$ prend la valeur 2
<b>Traitement :</b>	Tant que ... (1) $n$ prend la valeur ... (2) $u$ prend la valeur ... (3) Fin Tant que
<b>Sortie :</b>	Afficher $n$

**EXERCICE 12** correction Antilles septembre 2014

Commun à tous les candidats

**Partie A**

On considère la fonction  $f$  définie et dérivable sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  par

$$f(x) = xe^{-x}.$$

1. Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .
2. Déterminer la dérivée  $f'$  de la fonction  $f$  sur  $[0 ; +\infty[$  et en déduire le tableau de variations de  $f$  sur  $[0 ; +\infty[$ .

On donne en **annexe** la courbe  $\mathcal{C}_f$  représentative de la fonction  $f$  dans un repère du plan. La droite  $\Delta$  d'équation  $y = x$  a aussi été tracée.

**Partie B**

Soit la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

1. Placer sur le graphique donné en **annexe**, en utilisant la courbe  $\mathcal{C}_f$  et la droite  $\Delta$ , les points  $A_0, A_1$  et  $A_2$  d'ordonnées nulles et d'abscisses respectives  $u_0, u_1$  et  $u_2$ . Laisser les tracés explicatifs apparents.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n > 0$ .
3. Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante.
4. (a) Montrer que la suite  $(u_n)$  est convergente.
- (b) On admet que la limite de la suite  $(u_n)$  est solution de l'équation  $xe^{-x} = x$ .

Résoudre cette équation pour déterminer la valeur de cette limite.

**Partie C**

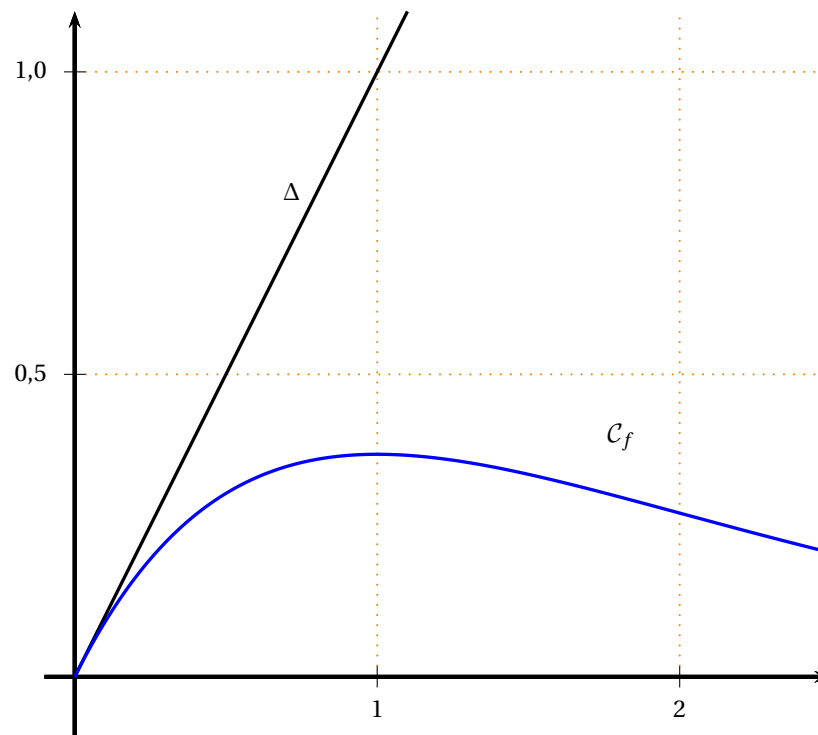
On considère la suite  $(S_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par

$$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n.$$

Compléter l'algorithme donné en **annexe** afin qu'il calcule  $S_{100}$ .

**Annexe à rendre avec la copie**

**Partie B - Question 1**



**Partie C**

Déclaration des variables :

$S$  et  $u$  sont des nombres réels

$k$  est un nombre entier

Initialisation :

$u$  prend la valeur .....

$S$  prend la valeur .....

Traitement :

Pour  $k$  variant de 1 à ....

$u$  prend la valeur  $u \times e^{-u}$

$S$  prend la valeur ....

Fin Pour

Afficher .....

**EXERCICE 13** correction Métropole septembre 2014

Commun à tous les candidats

On administre à un patient un médicament par injection intraveineuse. La quantité de médicament dans le sang diminue en fonction du temps.

Le but de l'exercice est d'étudier pour différentes hypothèses, l'évolution de cette quantité minute par minute.

1. On effectue à l'instant 0 une injection de 10 mL de médicament. On estime que 20 % du médicament est éliminé par minute. Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $u_n$  la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang au bout de  $n$  minutes. Ainsi  $u_0 = 10$ .

- (a) Quelle est la nature de la suite  $(u_n)$  ?
- (b) Pour tout entier naturel  $n$ , donner l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .
- (c) Au bout de combien de temps la quantité de médicament restant dans le sang devient-elle inférieure à 1 % de la quantité initiale ? Justifier la réponse.

2. Une machine effectue à l'instant 0 une injection de 10 mL de médicament. On estime que 20 % du médicament est éliminé par minute. Lorsque la quantité de médicament tombe en-dessous de 5 mL, la machine réinjecte 4 mL de produit.

Au bout de 15 minutes, on arrête la machine.

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $v_n$  la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang à la minute  $n$ .

L'algorithme suivant donne la quantité restante de médicament minute par minute.

Variables :  $n$  est un entier naturel.  
 $v$  est un nombre réel.

Initialisation : Affecter à  $v$  la valeur 10.

Traitement : Pour  $n$  allant de 1 à 15  
                   Affecter à  $v$  la valeur  $0,8 \times v$ .  
                   Si  $v < 5$  alors affecter à  $v$  la valeur  $v + 4$   
                   Afficher  $v$ .  
                   Fin de boucle.

(a) Calculer les éléments manquants du tableau ci-dessous donnant, arrondie à  $10^{-2}$  et pour  $n$  supérieur ou égal à 1, la quantité restante de médicament minute par minute obtenue avec l'algorithme.

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$v_n$	10	8	6,4					8,15	6,52	5,21	8,17	6,54	5,23	8,18	6,55	5,24

- (b) Au bout de 15 minutes, quelle quantité totale de médicament a été injectée dans l'organisme ?
- (c) On souhaite programmer la machine afin qu'elle injecte 2 mL de produit lorsque la quantité de médicament dans le sang est inférieure ou égale à 6 mL et qu'elle s'arrête au bout de 30 minutes. Recopier l'algorithme précédent en le modifiant pour qu'il affiche la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang minute par minute avec ce nouveau protocole.

3. On programme la machine de façon que :

- à l'instant 0, elle injecte 10 mL de médicament,
- toutes les minutes, elle injecte 1 mL de médicament.

On estime que 20 % du médicament présent dans le sang est éliminé par minute.

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $w_n$  la quantité de médicament, en mL, présente dans le sang du patient au bout de  $n$  minutes.

(a) Justifier que pour tout entier naturel  $n$ ,  $w_{n+1} = 0,8w_n + 1$ .

(b) Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $z_n = w_n - 5$ .

Démontrer que  $(z_n)$  est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

(c) En déduire l'expression de  $w_n$  en fonction de  $n$ .

(d) Quelle est la limite de la suite  $(w_n)$  ? Quelle interprétation peut-on en donner ?

**EXERCICE 14** correction Nouvelle Calédonie 2014

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  par

$$f(x) = 5 - \frac{4}{x+2}.$$

On admettra que  $f$  est dérivable sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ .

On a tracé en **annexe 1** dans un repère orthonormé la courbe  $\mathcal{C}$  représentative de  $f$  ainsi que la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = x$ .

1. Démontrer que  $f$  est croissante sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ .
2. Résoudre l'équation  $f(x) = x$  sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ . On note  $\alpha$  la solution.

On donnera la valeur exacte de  $\alpha$  puis on en donnera une valeur approchée à  $10^{-2}$  près.

3. On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .  
Sur la figure de **annexe 1**, en utilisant la courbe  $\mathcal{C}$  et la droite  $\mathcal{D}$ , placer les points  $M_0, M_1$  et  $M_2$  d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives  $u_0, u_1$  et  $u_2$ .

Quelles conjectures peut-on faire sur le sens de variation et la convergence de la suite  $(u_n)$  ?

4. (a) Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$$

où  $\alpha$  est le réel défini dans la question 2.

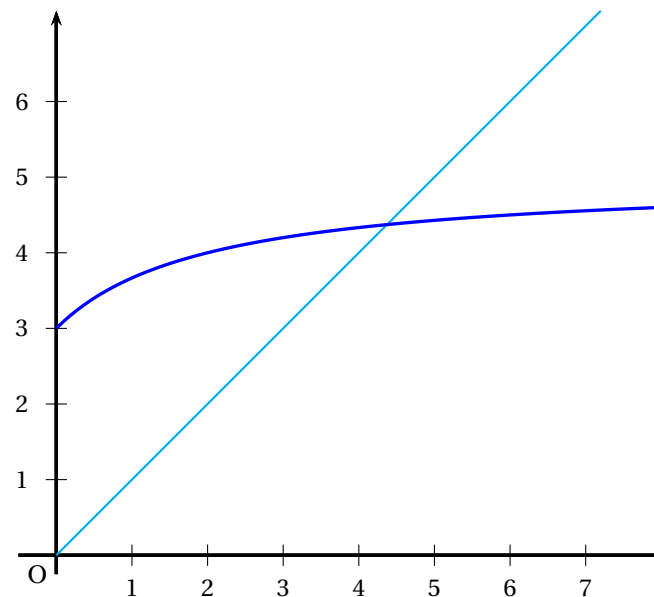
- (b) Peut-on affirmer que la suite  $(u_n)$  est convergente ? On justifiera la réponse.

5. Pour tout entier naturel  $n$ , on définit la suite  $(S_n)$  par

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n.$$

- (a) Calculer  $S_0, S_1$  et  $S_2$ . Donner une valeur approchée des résultats à  $10^{-2}$  près.
- (b) Compléter l'algorithme donné en **annexe 2** pour qu'il affiche la somme  $S_n$  pour la valeur de l'entier  $n$  demandée à l'utilisateur.
- (c) Montrer que la suite  $(S_n)$  diverge vers  $+\infty$ .

**Annexe 1 à rendre avec la copie**



**Annexe 2 à rendre avec la copie**

<b>Entrée :</b>	$n$ un entier naturel
<b>Variables :</b>	$u$ et $s$ sont des variables réelles $n$ et $i$ sont des variables entières
<b>Initialisation :</b>	$u$ prend la valeur 1 $s$ prend la valeur $u$ $i$ prend la valeur 0 Demander la valeur de $n$
<b>Traitement :</b>	Tant que ... Affecter à $i$ la valeur $i + 1$ Affecter à $u$ la valeur ... Affecter à $s$ la valeur ... Fin Tant que
<b>Sortie :</b>	Afficher $s$ .

**EXERCICE 15** correction Nouvelle Calédonie mars 2014

Commun à tous les candidats

**Partie A**

Soit  $f$  la fonction dérivable, définie sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  par

$$f(x) = x \ln(x).$$

1. Déterminer les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .
2. On appelle  $f'$  la fonction dérivée de  $f$  sur  $]0 ; +\infty[$ . Montrer que

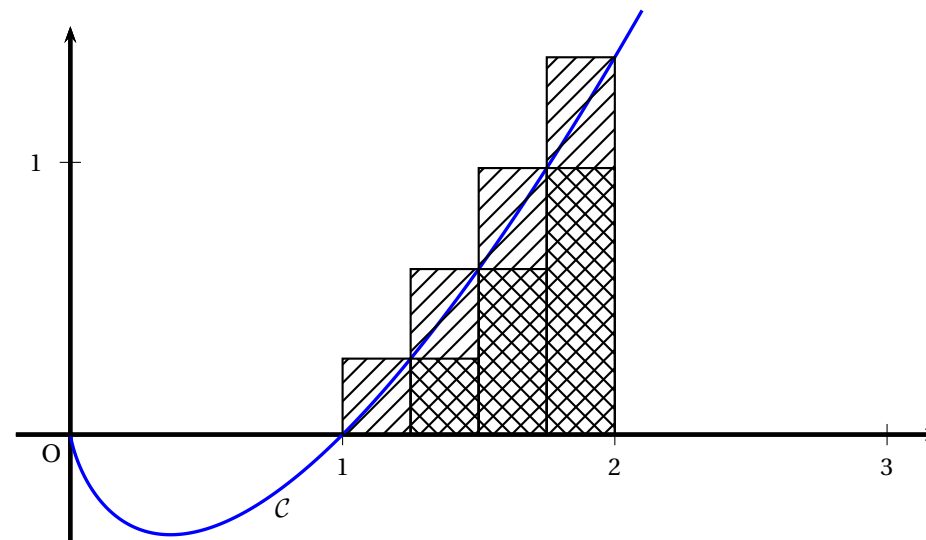
$$f'(x) = \ln(x) + 1.$$

3. Déterminer les variations de  $f$  sur  $]0 ; +\infty[$ .

**Partie B**

Soit  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormal.  
 Soit  $\mathcal{A}$  l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe  $\mathcal{C}$  et les droites d'équations respectives  $x = 1$  et  $x = 2$ .

On utilise l'algorithme suivant pour calculer, par la méthode des rectangles, une valeur approchée de l'aire  $\mathcal{A}$ . (voir la figure ci-après).



**Algorithme :**

**Variables**  
 $k$  et  $n$  sont des entiers naturels  
 $U, V$  sont des nombres réels

**Initialisation**  
 $U$  prend la valeur 0  
 $V$  prend la valeur 0  
 $n$  prend la valeur 4

**Traitement**  
 Pour  $k$  allant de 0 à  $n - 1$   
     Affecter à  $U$  la valeur  $U + \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right)$   
     Affecter à  $V$  la valeur  $V + \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k+1}{n}\right)$   
 Fin pour

**Affichage**  
 Afficher  $U$   
 Afficher  $V$

1. (a) Que représentent  $U$  et  $V$  sur le graphique précédent ?
- (b) Quelles sont les valeurs  $U$  et  $V$  affichées en sortie de l'algorithme (on donnera une valeur approchée de  $U$  par défaut à  $10^{-4}$  près et une valeur approchée par excès de  $V$  à  $10^{-4}$  près) ?
- (c) En déduire un encadrement de  $\mathcal{A}$ .
2. Soient les suites  $(U_n)$  et  $(V_n)$  définies pour tout entier  $n$  non nul par :

$$U_n = \frac{1}{n} \left[ f(1) + f\left(1 + \frac{1}{n}\right) + f\left(1 + \frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(1 + \frac{n-1}{n}\right) \right]$$

$$V_n = \frac{1}{n} \left[ f\left(1 + \frac{1}{n}\right) + f\left(1 + \frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(1 + \frac{n-1}{n}\right) + f(2) \right]$$

On admettra que, pour tout  $n$  entier naturel non nul,  $U_n \leq \mathcal{A} \leq V_n$ .

- (a) Trouver le plus petit entier  $n$  tel que  $V_n - U_n < 0,1$ .
- (b) Comment modifier l'algorithme précédent pour qu'il permette d'obtenir un encadrement de  $\mathcal{A}$  d'amplitude inférieure à  $0,1$  ?

### Partie C

Soit  $F$  la fonction dérivable, définie sur  $]0; +\infty[$  par

$$F(x) = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4}.$$

1. Montrer que  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .
2. Calculer la valeur exacte de  $\mathcal{A}$ .

**EXERCICE 16** correction Polynésie 2014

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite  $(u_n)$  définie par

$$u_0 = 0 \text{ et, pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = u_n + 2n + 2.$$

1. Calculer  $u_1$  et  $u_2$ .

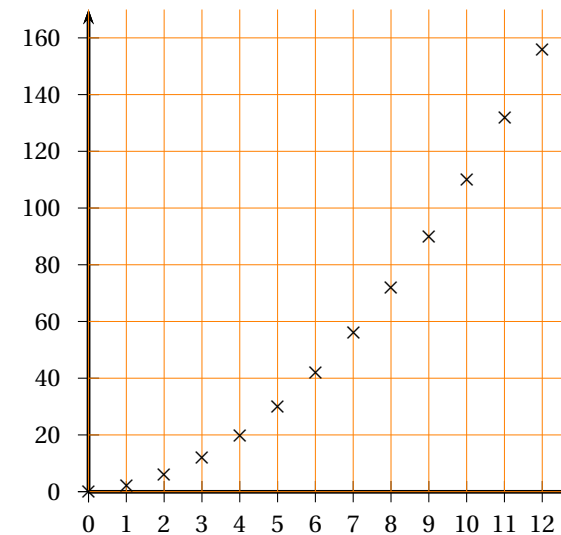
2. On considère les deux algorithmes suivants :

Algorithme 1	Algorithme 2
<b>Variables :</b> $n$ est un entier naturel $u$ est un réel	<b>Variables :</b> $n$ est un entier naturel $u$ est un réel
<b>Entrée :</b> Saisir la valeur de $n$	<b>Entrée :</b> Saisir la valeur de $n$
<b>Traitement :</b> $u$ prend la valeur 0 Pour $i$ allant de 1 à $n$ : $u$ prend la valeur $u + 2i + 2$ Fin Pour	<b>Traitement :</b> $u$ prend la valeur 0 Pour $i$ allant de 0 à $n - 1$ : $u$ prend la valeur $u + 2i + 2$ Fin Pour
<b>Sortie :</b> Afficher $u$	<b>Sortie :</b> Afficher $u$

De ces deux algorithmes, lequel permet d'afficher en sortie la valeur de  $u_n$ , la valeur de l'entier naturel  $n$  étant entrée par l'utilisateur ?

3. À l'aide de l'algorithme, on a obtenu le tableau et le nuage de points ci-dessous où  $n$  figure en abscisse et  $u_n$  en ordonnée.

$n$	$u_n$
0	0
1	2
2	6
3	12
4	20
5	30
6	42
7	56
8	72
9	90
10	110
11	132
12	156



(a) Quelle conjecture peut-on faire quant au sens de variation de la suite  $(u_n)$  ?

Démontrer cette conjecture.

(b) La forme parabolique du nuage de points amène à conjecturer l'existence de trois réels  $a, b$  et  $c$  tels que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = an^2 + bn + c$ .

Dans le cadre de cette conjecture, trouver les valeurs de  $a, b$  et  $c$  à l'aide des informations fournies.

4. On définit, pour tout entier naturel  $n$ , la suite  $(v_n)$  par :  $v_n = u_{n+1} - u_n$ .

(a) Exprimer  $v_n$  en fonction de l'entier naturel  $n$ . Quelle est la nature de la suite  $(v_n)$  ?

(b) On définit, pour tout entier naturel  $n$ ,  $S_n = \sum_{k=0}^n v_k = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ .

Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $S_n = (n + 1)(n + 2)$ .

(c) Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $S_n = u_{n+1} - u_0$ , puis exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .

**EXERCICE 17** correction **Antilles 2015**

**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

**Partie A**

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	$k$ et $p$ sont des entiers naturels $u$ est un réel
Entrée :	Demander la valeur de $p$
Traitement	: Affecter à $u$ la valeur 5 Pour $k$ variant de 1 à $p$ Affecter à $u$ la valeur $0,5u + 0,5(k - 1) - 1,5$ Fin de pour
Sortie :	Afficher $u$

Faire fonctionner cet algorithme pour  $p = 2$  en indiquant les valeurs des variables à chaque étape.

Quel nombre obtient-on en sortie ?

**Partie B**

Soit  $(u_n)$  la suite définie par son premier terme  $u_0 = 5$  et, pour tout entier naturel  $n$  par

$$u_{n+1} = 0,5u_n + 0,5n - 1,5.$$

1. Modifier l'algorithme de la première partie pour obtenir en sortie toutes les valeurs de  $u_n$  pour  $n$  variant de 1 à  $p$ .

2. À l'aide de l'algorithme modifié, après avoir saisi  $p = 4$ , on obtient les résultats suivants :

$n$	1	2	3	4
$u_n$	1	-0,5	-0,75	-0,375

Peut-on affirmer, à partir de ces résultats, que la suite  $(u_n)$  est décroissante ?

Justifier.

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 3,  $u_{n+1} > u_n$ .

Que peut-on en déduire quant au sens de variation de la suite  $(u_n)$  ?

4. Soit  $(v_n)$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  par  $v_n = 0,1u_n - 0,1n + 0,5$ .

Démontrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique de raison 0,5 et exprimer alors  $v_n$  en fonction de  $n$ .

5. En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_n = 10 \times 0,5^n + n - 5.$$

6. Déterminer alors la limite de la suite  $(u_n)$ .

**EXERCICE 18** correction Centres Étrangers 2015

Commun à tous les candidats

Soit  $a$  un nombre réel fixé non nul.

Le but de cet exercice est d'étudier la suite  $(u_n)$  définie par :

$$u_0 = a \quad \text{et, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = e^{2u_n} - e^{u_n}.$$

On remarquera que cette égalité peut aussi s'écrire :  $u_{n+1} = e^{u_n} (e^{u_n} - 1)$ .

1. Soit  $g$  la fonction définie pour tout réel  $x$  par :

$$g(x) = e^{2x} - e^x - x.$$

- (a) Calculer  $g'(x)$  et prouver que, pour tout réel  $x$  :  $g'(x) = (e^x - 1)(2e^x + 1)$ .
- (b) Déterminer les variations de la fonction  $g$  et donner la valeur de son minimum.
- (c) En remarquant que  $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$ , étudier le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .

2. Dans cette question, on suppose que  $a \leq 0$ .

- (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \leq 0$ .
- (b) Déduire des questions précédentes que la suite  $(u_n)$  est convergente.
- (c) Dans le cas où  $a$  vaut 0, donner la limite de la suite  $(u_n)$ .

3. Dans cette question, on suppose que  $a > 0$ .

La suite  $(u_n)$  étant croissante, la question 1. permet d'affirmer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \geq a$ .

- (a) Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_{n+1} - u_n \geq g(a)$ .

- (b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$u_n \geq a + n \times g(a).$$

- (c) Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .

4. Dans cette question, on prend  $a = 0,02$ .

L'algorithme suivant a pour but de déterminer le plus petit entier  $n$  tel que  $u_n > M$ , où  $M$  désigne un réel positif. Cet algorithme est incomplet.

<b>Variables</b>	$n$ est un entier, $u$ et $M$ sont deux réels
<b>Initialisation</b>	$u$ prend la valeur 0,02 $n$ prend la valeur 0 Saisir la valeur de $M$
<b>Traitement</b>	Tant que ... ... ... Fin tant que
<b>Sortie</b>	Afficher $n$

- (a) Sur la copie, recopier la partie « Traitement » en la complétant.
- (b) À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur que cet algorithme affichera si  $M = 60$ .

**EXERCICE 19** correction **Liban 2015**

On définit la suite  $(u_n)$  de la façon suivante :

pour tout entier naturel  $n$ , 
$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx.$$

1. Calculer  $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx.$

2. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}.$

(b) En déduire la valeur exacte de  $u_1.$

3. (a) Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il affiche en sortie le terme de rang  $n$  de la suite  $(u_n)$  où  $n$  est un entier naturel saisi en entrée par l'utilisateur.

Variables :	$i$ et $n$ sont des entiers naturels $u$ est un réel
Entrée :	Saisir $n$
Initialisation :	Affecter à $u$ la valeur ...
Traitement :	Pour $i$ variant de 1 à ...  Affecter à $u$ la valeur ... Fin de Pour
Sortie :	Afficher $u$

(b) À l'aide de cet algorithme, on a obtenu le tableau de valeurs suivant :

$n$	0	1	2	3	4	5	10	50	100
$u_n$	0,693 1	0,306 9	0,193 1	0,140 2	0,109 8	0,090 2	0,047 5	0,009 9	0,005 0

Quelles conjectures concernant le comportement de la suite  $(u_n)$  peut-on émettre ?

4. (a) Démontrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante.

(b) Démontrer que la suite  $(u_n)$  est convergente.

5. On appelle  $\ell$  la limite de la suite  $(u_n)$ . Démontrer que  $\ell = 0.$

**EXERCICE 20** correction **Métropole septembre 2015**

**Commun à tous les candidats**

Soit  $f$  la fonction définie et dérivable sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  telle que :

$$f(x) = \frac{x}{e^x - x}$$

On admet que la fonction  $f$  est positive sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ .

On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthogonal du plan.

La courbe  $\mathcal{C}$  est représentée en annexe, **à rendre avec la copie**.

**Partie A**

Soit la suite  $(I_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $I_n = \int_0^n f(x) dx$ .

On ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de  $I_n$  en fonction de  $n$ .

1. Montrer que la suite  $(I_n)$  est croissante.

2. On admet que pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ ,  $e^x - x \geq \frac{e^x}{2}$ .

(a) Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $I_n \leq \int_0^n 2xe^{-x} dx$ .

(b) Soit  $H$  la fonction définie et dérivable sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  telle que :

$$H(x) = (-x - 1)e^{-x}$$

Déterminer la fonction dérivée  $H'$  de la fonction  $H$ .

(c) En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $I_n \leq 2$ .

3. Montrer que la suite  $(I_n)$  est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

**Partie B**

On considère l'algorithme suivant dans lequel les variables sont

□  $K$  et  $i$  des entiers naturels,  $K$  étant non nul ;

□  $A$ ,  $x$  et  $h$  des réels.

Entrée :	Saisir $K$ entier naturel non nul
Initialisation	Affecter à $A$ la valeur 0 Affecter à $x$ la valeur 0 Affecter à $h$ la valeur $\frac{1}{K}$
Traitement	Pour $i$ variant de 1 à $K$   Affecter à $A$ la valeur $A + h \times f(x)$   Affecter à $x$ la valeur $x + h$ Fin Pour
Sortie	Afficher $A$

1. Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour  $K = 4$ .

Les valeurs successives de  $A$  seront arrondies au millième.

$i$	$A$	$x$
1		
2		
3		
4		

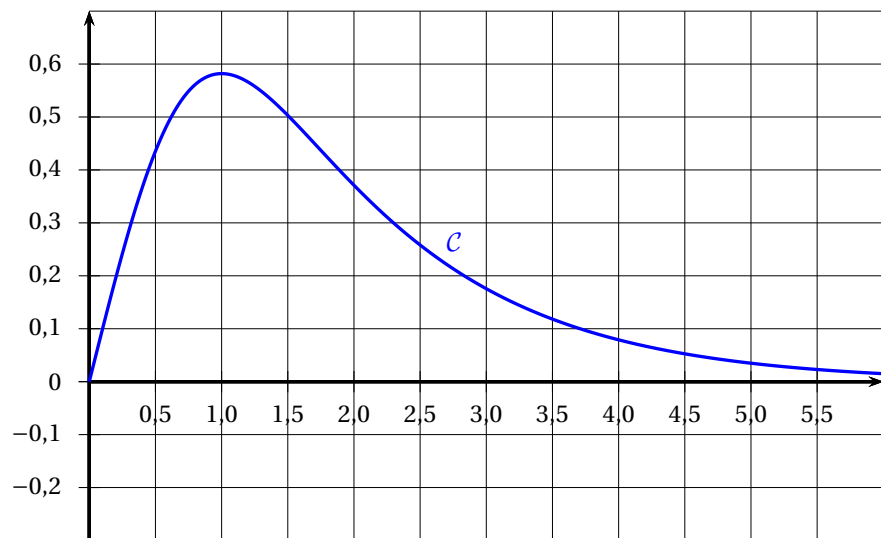
2. En l'illustrant sur l'annexe **à rendre avec la copie**, donner une interprétation graphique du résultat affiché par cet algorithme pour  $K = 8$ .

3. Que donne l'algorithme lorsque  $K$  devient grand ?

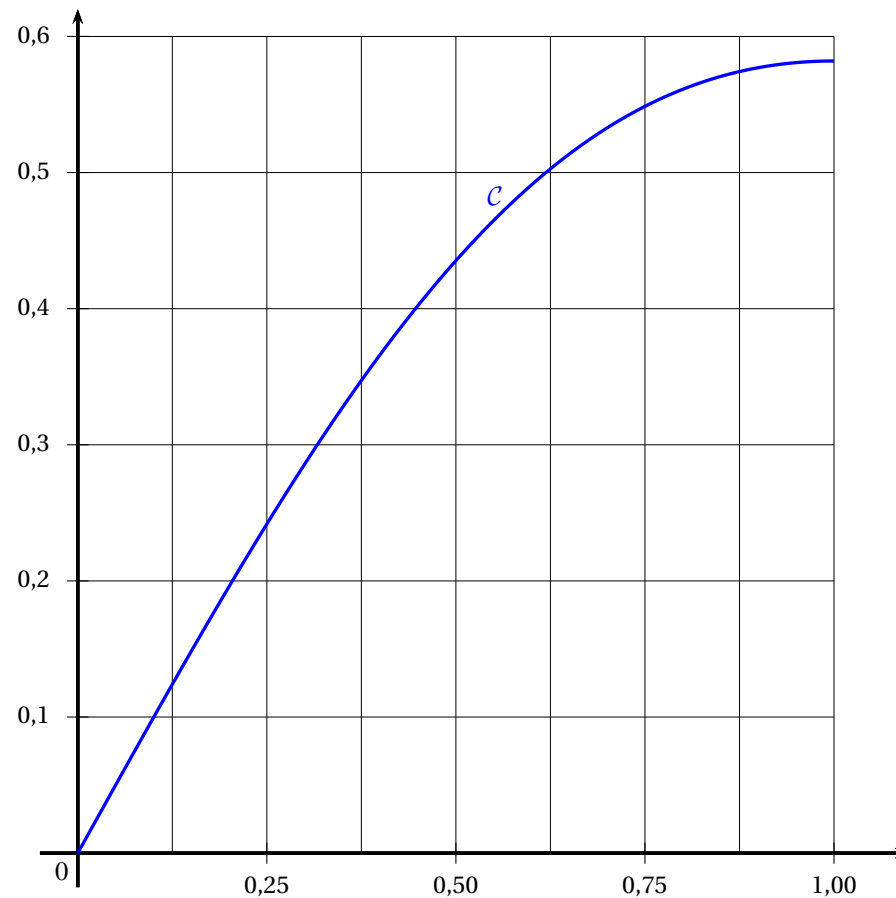
ANNEXE

À rendre avec la copie

Courbe  $\mathcal{C}$ , représentative de la fonction  $f$  sur  $[0 ; 6]$



Courbe  $\mathcal{C}$ , représentative de la fonction  $f$  sur  $[0 ; 1]$



**EXERCICE 21** correction Polynésie 2015

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Soit  $(v_n)$  la suite définie par

$$v_1 = \ln(2) \quad \text{et, pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } v_{n+1} = \ln(2 - e^{-v_n}).$$

On admet que cette suite est définie pour tout entier naturel  $n$  non nul.

On définit ensuite la suite  $(S_n)$  pour tout entier naturel  $n$  non nul par :

$$S_n = \sum_{k=1}^n v_k = v_1 + v_2 + \dots + v_n.$$

Le but de cet exercice est de déterminer la limite de  $(S_n)$ .

**Partie A -- Conjectures à l'aide d'un algorithme**

1. Recopier et compléter l'algorithme suivant qui calcule et affiche la valeur de  $S_n$  pour une valeur de  $n$  choisie par l'utilisateur :

Variables :	$n, k$ entiers $S, v$ réels
Initialisation :	Saisir la valeur de $n$ $v$ prend la valeur ... $S$ prend la valeur ...
Traitement :	Pour $k$ variant de ... à ... faire   ...prend la valeur ...   ...prend la valeur ... Fin Pour
Sortie :	Afficher $S$

2. À l'aide de cet algorithme, on obtient quelques valeurs de  $S_n$ . Les valeurs arrondies au dixième sont données dans le tableau ci-dessous :

$n$	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000
$S_n$	2,4	4,6	6,9	9,2	11,5	13,8

En expliquant votre démarche, émettre une conjecture quant au comportement de la suite  $(S_n)$ .

**Partie B -- Étude d'une suite auxiliaire**

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on définit la suite  $(u_n)$  par  $u_n = e^{v_n}$ .

1. Vérifier que  $u_1 = 2$  et que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n}$ .
2. Calculer  $u_2, u_3$  et  $u_4$ . Les résultats seront donnés sous forme fractionnaire.
3. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $u_n = \frac{n+1}{n}$ .

**Partie C -- Étude de  $(S_n)$**

1. Pour tout entier naturel  $n$  non nul, exprimer  $v_n$  en fonction de  $u_n$ , puis  $v_n$  en fonction de  $n$ .
2. Vérifier que  $S_3 = \ln(4)$ .
3. Pour tout entier naturel  $n$  non nul, exprimer  $S_n$  en fonction de  $n$ . En déduire la limite de la suite  $(S_n)$ .

# Complexes

## EXERCICE 22 correction Antilles 2013

Commun n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite  $(z_n)$  à termes complexes définie par  $z_0 = 1 + i$  et, pour tout entier naturel  $n$ , par

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{3}.$$

Pour tout entier naturel  $n$ , on pose :  $z_n = a_n + ib_n$ , où  $a_n$  est la partie réelle de  $z_n$  et  $b_n$  est la partie imaginaire de  $z_n$ .

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence des suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$ .

### Partie A

1. Donner  $a_0$  et  $b_0$ .

2. Calculer  $z_1$ , puis en déduire que  $a_1 = \frac{1 + \sqrt{2}}{3}$  et  $b_1 = \frac{1}{3}$ .

3. On considère l'algorithme suivant :

```

Variables : A et B des nombres réels
           K et N des nombres entiers
Initialisation : Affecter à A la valeur 1
                Affecter à B la valeur 1
Traitement :
Entrer la valeur de N
Pour K variant de 1 à N
    Affecter à A la valeur  $\frac{A + \sqrt{A^2 + B^2}}{3}$ 
    Affecter à B la valeur  $\frac{B}{3}$ 
FinPour
Afficher A
    
```

(a) On exécute cet algorithme en saisissant  $N = 2$ . Recopier et compléter le tableau ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme (on arrondira les valeurs calculées à  $10^{-4}$  près).

K	A	B
1		
2		

(b) Pour un nombre  $N$  donné, à quoi correspond la valeur affichée par l'algorithme par rapport à la situation étudiée dans cet exercice ?

### Partie B

1. Pour tout entier naturel  $n$ , exprimer  $z_{n+1}$  en fonction de  $a_n$  et  $b_n$ .

En déduire l'expression de  $a_{n+1}$  en fonction de  $a_n$  et  $b_n$ , et l'expression de  $b_{n+1}$  en fonction de  $a_n$  et  $b_n$ .

2. Quelle est la nature de la suite  $(b_n)$  ? En déduire l'expression de  $b_n$  en fonction de  $n$ , et déterminer la limite de  $(b_n)$ .

3. (a) On rappelle que pour tous nombres complexes  $z$  et  $z'$  :

$$|z + z'| \leq |z| + |z'| \quad (\text{inégalité triangulaire}).$$

Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,

$$|z_{n+1}| \leq \frac{2|z_n|}{3}.$$

(b) Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $u_n = |z_n|$ .

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}.$$

En déduire que la suite  $(u_n)$  converge vers une limite que l'on déterminera.

(c) Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $|a_n| \leq u_n$ . En déduire que la suite  $(a_n)$  converge vers une limite que l'on déterminera.

**EXERCICE 23**

correction

Liban 2014

**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

On considère la suite de nombres complexes  $(z_n)$  définie par  $z_0 = \sqrt{3} - i$  et pour tout entier naturel  $n$  :

$$z_{n+1} = (1 + i)z_n.$$

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

**Partie A**

Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $u_n = |z_n|$ .

1. Calculer  $u_0$ .
2. Démontrer que  $(u_n)$  est la suite géométrique de raison  $\sqrt{2}$  et de premier terme 2.
3. Pour tout entier naturel  $n$ , exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .
4. Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .
5. Étant donné un réel positif  $p$ , on souhaite déterminer, à l'aide d'un algorithme, la plus petite valeur de l'entier naturel  $n$  telle que  $u_n > p$ .

Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions de traitement et de sortie, de façon à afficher la valeur cherchée de l'entier  $n$ .

<b>Variables</b>	:	$u$ est un réel $p$ est un réel $n$ est un entier
<b>Initialisation</b>	:	Affecter à $n$ la valeur 0 Affecter à $u$ la valeur 2
<b>Entrée</b>	:	Demander la valeur de $p$
<b>Traitement</b>	:	
<b>Sortie</b>	:	

**Partie B**

1. Déterminer la forme algébrique de  $z_1$ .
2. Déterminer la forme exponentielle de  $z_0$  et de  $1 + i$ .

En déduire la forme exponentielle de  $z_1$ .

3. Déduire des questions précédentes la valeur exacte de  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

**EXERCICE 24** correction **Pondichéry 2014**

**Candidats n'ayant pas suivi la spécialité**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $A_n$  le point d'affixe  $z_n$  défini par :

$$z_0 = 1 \quad \text{et} \quad z_{n+1} = \left( \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i \right) z_n.$$

On définit la suite  $(r_n)$  par  $r_n = |z_n|$  pour tout entier naturel  $n$ .

1. Donner la forme exponentielle du nombre complexe  $\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$ .

2. (a) Montrer que la suite  $(r_n)$  est géométrique de raison  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

(b) En déduire l'expression de  $r_n$  en fonction de  $n$ .

(c) Que dire de la longueur  $OA_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  ?

3. On considère l'algorithme suivant :

Variables	$n$ entier naturel R réel P réel strictement positif
Entrée	Demander la valeur de P
Traitement	R prend la valeur 1 $n$ prend la valeur 0 Tant que $R > P$ $n$ prend la valeur $n + 1$ R prend la valeur $\frac{\sqrt{3}}{2}R$ Fin tant que
Sortie	Afficher $n$

(a) Quelle est la valeur affichée par l'algorithme pour  $P = 0,5$  ?

(b) Pour  $P = 0,01$  on obtient  $n = 33$ . Quel est le rôle de cet algorithme ?

4. (a) Démontrer que le triangle  $OA_nA_{n+1}$  est rectangle en  $A_{n+1}$ .

(b) On admet que  $z_n = r_n e^{i \frac{n\pi}{6}}$ .

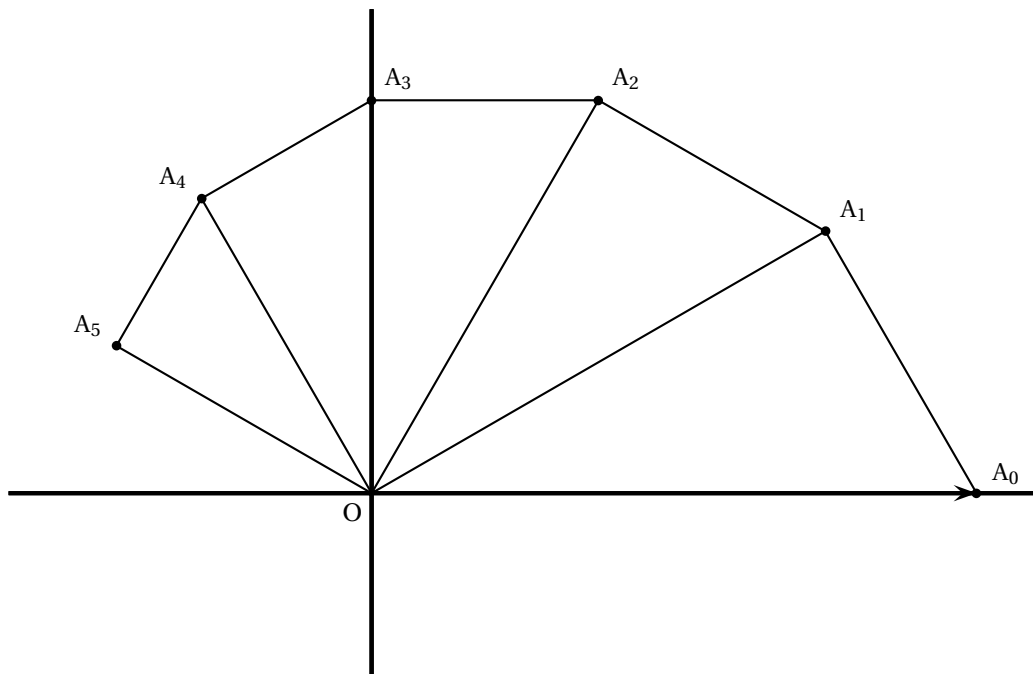
Déterminer les valeurs de  $n$  pour lesquelles  $A_n$  est un point de l'axe des ordonnées.

(c) Compléter la figure donnée en annexe, à rendre avec la copie, en représentant les points  $A_6, A_7, A_8$  et  $A_9$ .

Les traits de construction seront apparents.

**ANNEXE**

À compléter et à rendre avec la copie



**EXERCICE 25** correction AmeriqueNordS2015-exo-2.tex

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On se place dans un repère orthonormé et, pour tout entier naturel  $n$ , on définit les points  $(A_n)$  par leurs coordonnées  $(x_n ; y_n)$  de la façon suivante :

$$\begin{cases} x_0 = -3 \\ y_0 = 4 \end{cases} \text{ et pour tout entier naturel } n : \begin{cases} x_{n+1} = 0,8x_n - 0,6y_n \\ y_{n+1} = 0,6x_n + 0,8y_n \end{cases}$$

1. (a) Déterminer les coordonnées des points  $A_0, A_1$  et  $A_2$ .
- (b) Pour construire les points  $A_n$  ainsi obtenus, on écrit l'algorithme suivant :

```

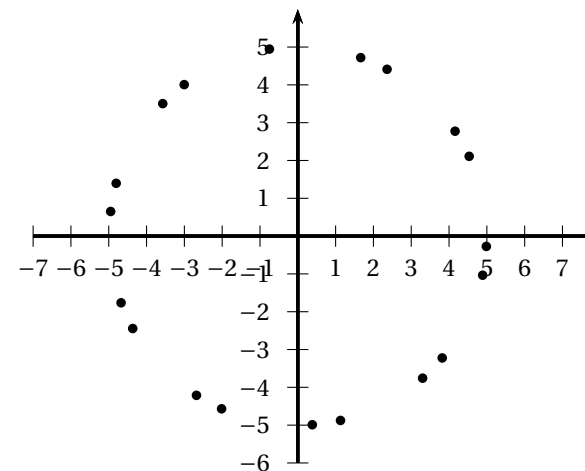
Variables :
i, x, y, t : nombres réels

Initialisation :
x prend la valeur -3
y prend la valeur 4

Traitement :
Pour i allant de 0 à 20
    Construire le point de coordonnées (x ; y)
    t prend la valeur x
    x prend la valeur ...
    y prend la valeur ...
Fin Pour
    
```

Recopier et compléter cet algorithme pour qu'il construise les points  $A_0$  à  $A_{20}$ .

- (c) À l'aide d'un tableur, on a obtenu le nuage de points suivant :



Identifier les points  $A_0, A_1$  et  $A_2$  .. On les nommera sur la figure jointe en **annexe, (à rendre avec la copie)**.

Quel semble être l'ensemble auquel appartiennent les points  $A_n$  pour tout  $n$  entier naturel ?

2. Le but de cette question est de construire géométriquement les points  $A_n$  pour tout  $n$  entier naturel.

Dans le plan complexe, on nomme, pour tout entier naturel  $n$ ,  $z_n = x_n + iy_n$  l'affixe du point  $A_n$ .

- (a) Soit  $u_n = |z_n|$ . Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = 5$ . Quelle interprétation géométrique peut-on faire de ce résultat ?
- (b) On admet qu'il existe un réel  $\theta$  tel que  $\cos(\theta) = 0,8$  et  $\sin(\theta) = 0,6$ .  
Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $e^{i\theta} z_n = z_{n+1}$ .
- (c) Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $z_n = e^{in\theta} z_0$ .
- (d) Montrer que  $\theta + \frac{\pi}{2}$  est un argument du nombre complexe  $z_0$ .
- (e) Pour tout entier naturel  $n$ , déterminer, en fonction de  $n$  et  $\theta$ , un argument du nombre complexe  $z_n$ .



# Probabilités

## EXERCICE 26 correction Amérique du Nord 2012

### Commun à tous les candidats

Dans une association sportive, un quart des femmes et un tiers des hommes adhèrent à la section tennis. On sait également que 30 % des membres de cette association adhèrent à la section tennis.

#### Partie A

On choisit au hasard un membre de cette association et on note :

- F l'évènement « le membre choisi est une femme »,
- T l'évènement « le membre choisi adhère à la section tennis ».

1. Montrer que la probabilité de l'évènement F est égale à  $\frac{2}{5}$ .

2. On choisit un membre parmi les adhérents à la section tennis.

Quelle est la probabilité que ce membre soit une femme ?

#### Partie B

Pour financer une sortie, les membres de cette association organisent une loterie.

1. Chaque semaine, un membre de l'association est choisi au hasard de manière indépendante pour tenir la loterie.

(a) Déterminer la probabilité pour qu'en quatre semaines consécutives, il y ait exactement deux fois un membre qui adhère à la section tennis parmi les membres choisis.

(b) Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on note  $p_n$  la probabilité pour qu'en  $n$  semaines consécutives, il y ait au moins un membre qui adhère à la section tennis parmi les membres choisis.

Montrer que pour tout entier  $n$  non nul,  $p_n = 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n$ .

(c) Déterminer le nombre minimal de semaines pour que  $p_n \geq 0,99$ .

2. Pour cette loterie, on utilise une urne contenant 100 jetons ; 10 jetons exactement sont gagnants et rapportent 20 euros chacun, les autres ne rapportent rien.

Pour jouer à cette loterie, un joueur doit payer 5 € puis tire au hasard et de façon simultanée deux jetons de l'urne : il reçoit alors 20 euros par jeton gagnant. Les deux jetons sont ensuite remis dans l'urne.

On note  $X$  la variable aléatoire associant le gain algébrique (déduction faite des 5 €) réalisé par un joueur lors d'une partie de cette loterie.

(a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire  $X$ .

(b) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire  $X$  et interpréter le résultat obtenu.

**EXERCICE 27** correction **Amerique du Nord 2013****Commun à tous les candidats***Les parties A B et C peuvent être traitées indépendamment les unes des autres*

Une boulangerie industrielle utilise une machine pour fabriquer des pains de campagne pesant en moyenne 400 grammes. Pour être vendus aux clients, ces pains doivent peser au moins 385 grammes. Un pain dont la masse est strictement inférieure à 385 grammes est un pain non-commercialisable, un pain dont la masse est supérieure ou égale à 385 grammes est commercialisable.

La masse d'un pain fabriqué par la machine peut être modélisée par une variable aléatoire  $X$  suivant la loi normale d'espérance  $\mu = 400$  et d'écart-type  $\sigma = 11$ .

*Les probabilités seront arrondies au millième le plus proche*

**Partie A**

*On pourra utiliser le tableau suivant dans lequel les valeurs sont arrondies au millième le plus proche.*

$x$	380	385	390	395	400	405	410	415	420
$P(X \leq x)$	0,035	0,086	0,182	0,325	0,5	0,675	0,818	0,914	0,965

- Calculer  $P(390 \leq X \leq 410)$ .
- Calculer la probabilité  $p$  qu'un pain choisi au hasard dans la production soit commercialisable.
- Le fabricant trouve cette probabilité  $p$  trop faible. Il décide de modifier ses méthodes de production afin de faire varier la valeur de  $\sigma$  sans modifier celle de  $\mu$ .

Pour quelle valeur de  $\sigma$  la probabilité qu'un pain soit commercialisable est-elle égale à 96 % ? On arrondira le résultat au dixième.

On pourra utiliser le résultat suivant : lorsque  $Z$  est une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1, on a  $P(Z \leq -1,751) \approx 0,040$ .

**Partie B**

Les méthodes de production ont été modifiées dans le but d'obtenir 96 % de pains commercialisables.

Afin d'évaluer l'efficacité de ces modifications, on effectue un contrôle qualité sur un échantillon de 300 pains fabriqués.

- Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de pains commercialisables dans un échantillon de taille 300.
- Parmi les 300 pains de l'échantillon, 283 sont commercialisables.

Au regard de l'intervalle de fluctuation obtenu à la question 1, peut-on décider que l'objectif a été atteint ?

**Partie C**

Le boulanger utilise une balance électronique. Le temps de fonctionnement sans dérèglement, en jours, de cette balance électronique est une variable aléatoire  $T$  qui suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ .

- On sait que la probabilité que la balance électronique ne se dérègle pas avant 30 jours est de 0,913. En déduire la valeur de  $\lambda$  arrondie au millième.

Dans toute la suite on prendra  $\lambda = 0,003$ .

- Quelle est la probabilité que la balance électronique fonctionne encore sans dérèglement après 90 jours, sachant qu'elle a fonctionné sans dérèglement 60 jours ?
- Le vendeur de cette balance électronique a assuré au boulanger qu'il y avait une chance sur deux pour que la balance ne se dérègle pas avant un an. A-t-il raison ? Si non, pour combien de jours est-ce vrai ?

**EXERCICE 28** correction Antilles septembre 2013

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

*Les deux parties sont indépendantes*

Le robot Tom doit emprunter un pont sans garde-corps de 10 pas de long et de 2 pas de large. Sa démarche est très particulière :

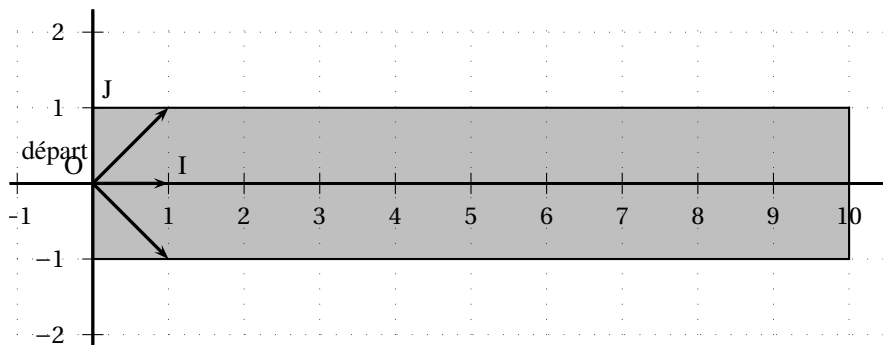
- Soit il avance d'un pas tout droit ;
- Soit il se déplace en diagonale vers la gauche (déplacement équivalent à un pas vers la gauche et un pas tout droit) ;
- Soit il se déplace en diagonale vers la droite (déplacement équivalent à un pas vers la droite et un pas tout droit).

On suppose que ces trois types de déplacement sont aléatoires et équiprobables.

L'objectif de cet exercice est d'estimer la probabilité  $p$  de l'évènement  $S$  « Tom traverse le pont » c'est-à-dire « Tom n'est pas tombé dans l'eau et se trouve encore sur le pont au bout de 10 déplacements ».

**Partie A** : modélisation et simulation

On schématise le pont par un rectangle dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, I, J)$  comme l'indique la figure ci-dessous. On suppose que Tom se trouve au point de coordonnées  $(0; 0)$  au début de la traversée. On note  $(x; y)$  les coordonnées de la position de Tom après  $x$  déplacements.



On a écrit l'algorithme suivant qui simule la position de Tom au bout de  $x$  déplacements :

```

x, y, n sont des entiers
Affecter à x la valeur 0
Affecter à y la valeur 0
Tant que y ≥ -1 et y ≤ 1 et x ≤ 9
    Affecter à n une valeur choisie au hasard entre -1, 0 et 1
    Affecter à y la valeur y + n
    Affecter à x la valeur x + 1
Fin tant que
Afficher « la position de Tom est » (x ; y)
    
```

1. On donne les couples suivants :  $(-1; 1)$  ;  $(10; 0)$  ;  $(2; 4)$  ;  $(10; 2)$ .

Lesquels ont pu être obtenus avec cet algorithme ? Justifier la réponse.

2. Modifier cet algorithme pour qu'à la place de « la position de Tom est  $(x; y)$  », il affiche finalement « Tom a réussi la traversée » ou « Tom est tombé ».

**Partie B**

Pour tout  $n$  entier naturel compris entre 0 et 10, on note :

$A_n$  l'évènement « après  $n$  déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée  $-1$  ».

$B_n$  l'évènement « après  $n$  déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée  $0$  ».

$C_n$  l'évènement « après  $n$  déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée  $1$  ».

On note  $a_n, b_n, c_n$  les probabilités respectives des évènements  $A_n, B_n, C_n$ .

1. Justifier que  $a_0 = 0, b_0 = 1, c_0 = 0$ .

2. Montrer que pour tout entier naturel  $n$  compris entre 0 et 9, on a

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{3} \\ b_{n+1} = \frac{a_n + b_n + c_n}{3} \end{cases}$$

On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

3. Calculer les probabilités  $p(A_1)$ ,  $p(B_1)$  et  $p(C_1)$ .

4. Calculer la probabilité que Tom se trouve sur le pont au bout de deux déplacements.

5. À l'aide d'un tableur, on a obtenu la feuille de calcul ci-contre qui donne des valeurs approchées de  $a_n$ ,  $b_n$ ,  $c_n$  pour  $n$  compris entre 0 et 10.

Donner une valeur approchée à 0,001 près de la probabilité que Tom traverse le pont (on pourra s'aider du tableau ci-contre).

$n$	$a_n$	$b_n$	$c_n$
0	0	1	0
1	0,333 333	0,333 333	0,333 333
2	0,222 222	0,333 333	0,222 222
3	0,185 185	0,259 259	0,185 185
4	0,148 148	0,209 877	0,148 148
5	0,119 342	0,168 724	0,119 342
6	0,096 022	0,135 802	0,096 022
7	0,077 275	0,109 282	0,077 275
8	0,062 186	0,087 944	0,062 186
9	0,050 043	0,070 772	0,050 043
10	0,040 272	0,056 953	0,040 272

**EXERCICE 29** correction **Pondichéry 2013**

**Commun à tous les candidats**

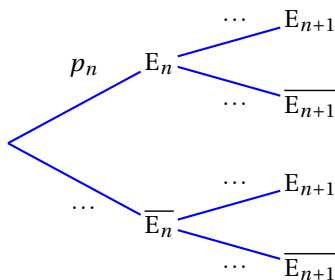
Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

- Un salarié malade est absent
- La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
- Si la semaine  $n$  le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine  $n + 1$  avec une probabilité égale à  $0,04$ .
- Si la semaine  $n$  le salarié est malade, il reste malade la semaine  $n + 1$  avec une probabilité égale à  $0,24$ .

On désigne, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à  $1$ , par  $E_n$  l'évènement « le salarié est absent pour cause de maladie la  $n$ -ième semaine ». On note  $p_n$  la probabilité de l'évènement  $E_n$ . On a ainsi :  $p_1 = 0$  et, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à  $1$  :  $0 \leq p_n < 1$ .

1. (a) Déterminer la valeur de  $p_3$  à l'aide d'un arbre de probabilité.
- (b) Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.

2. (a) Recopier sur la copie et compléter l'arbre de probabilité donné ci-dessous



- (b) Montrer que, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à  $1$ ,  $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,04$ .
- (c) Montrer que la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à  $1$  par  $u_n = p_n - 0,05$  est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison  $r$ . En déduire l'expression de  $u_n$  puis de  $p_n$  en fonction de  $n$  et  $r$ .
- (d) En déduire la limite de la suite  $(p_n)$ .
- (e) On admet dans cette question que la suite  $(p_n)$  est croissante. On considère l'algorithme suivant :

Variables	K et J sont des entiers naturels, P est un nombre réel
Initialisation	P prend la valeur 0 J prend la valeur 1
Entrée	Saisir la valeur de K
Traitement	Tant que $P < 0,05 - 10^{-K}$ P prend la valeur $0,2 \times P + 0,04$ J prend la valeur J + 1 Fin tant que
Sortie	Afficher J

À quoi correspond l'affichage final J ?

Pourquoi est-on sûr que cet algorithme s'arrête ?

3. Cette entreprise emploie 220 salariés. Pour la suite on admet que la probabilité pour qu'un salarié soit malade une semaine donnée durant cette période d'épidémie est égale à  $p = 0,05$ .

On suppose que l'état de santé d'un salarié ne dépend pas de l'état de santé de ses collègues.

On désigne par X la variable aléatoire qui donne le nombre de salariés malades une semaine donnée.

(a) Justifier que la variable aléatoire  $X$  suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

Calculer l'espérance mathématique  $\mu$  et l'écart type  $\sigma$  de la variable aléatoire  $X$ .

(b) On admet que l'on peut approcher la loi de la variable aléatoire  $\frac{X - \mu}{\sigma}$

par la loi normale centrée réduite c'est-à-dire de paramètres 0 et 1.

On note  $Z$  une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

Le tableau suivant donne les probabilités de l'évènement  $Z < x$  pour quelques valeurs du nombre réel  $x$ .

$x$	-1,55	-1,24	-0,93	-0,62	-0,31	0,00	0,31	0,62	0,93	1,24	1,55
$P(Z < x)$	0,061	0,108	0,177	0,268	0,379	0,500	0,621	0,732	0,823	0,892	0,939

Calculer, au moyen de l'approximation proposée en question b., une valeur approchée à  $10^{-2}$  près de la probabilité de l'évènement : « le nombre de salariés absents dans l'entreprise au cours d'une semaine donnée est supérieur ou égal à 7 et inférieur ou égal à 15 ».

# Espace

## EXERCICE 30 correction Asie 2015

Commun à tous les candidats

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et justifier la réponse. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

Dans les questions 1 et 2, on munit l'espace d'un repère orthonormé, et on considère les plans  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  d'équations respectives  $x + y + z - 5 = 0$  et  $7x - 2y + z - 2 = 0$ .

1. **Affirmation 1** : les plans  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  sont perpendiculaires.
2. **Affirmation 2** : les plans  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  se coupent suivant la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t + 1 \\ z = -3t + 4 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

3. Un joueur de jeux vidéo en ligne adopte toujours la même stratégie. Sur les 312 premières parties jouées, il en gagne 223. On assimile les parties jouées à un échantillon aléatoire de taille 312 dans l'ensemble des parties.

On souhaite estimer la proportion de parties que va gagner le joueur, sur les prochaines parties qu'il jouera, tout en conservant la même stratégie.

**Affirmation 3** : au niveau de confiance de 95 %, la proportion de parties gagnées doit appartenir à l'intervalle  $[0,658 ; 0,771]$ .

4. On considère l'algorithme suivant :

VARIABLES	$a, b$ sont deux nombres réels tels que $a < b$ $x$ est un nombre réel $f$ est une fonction définie sur l'intervalle $[a ; b]$
TRAITEMENT	Lire $a$ et $b$ Tant que $b - a > 0,3$ $x$ prend la valeur $\frac{a+b}{2}$ Si $f(x)f(a) > 0$ , alors $a$ prend la valeur $x$ sinon $b$ prend la valeur $x$ Fin Si Fin Tant que Afficher $\frac{a+b}{2}$

**Affirmation 4** : si l'on entre  $a = 1, b = 2$  et  $f(x) = x^2 - 3$ , alors l'algorithme affiche en sortie le nombre 1,6875.

## Correction

### EXERCICE 1 énoncé Centres Étrangers 2014

Commun à tous les candidats

Les parties A et B sont indépendantes

1. On considère la fonction  $f_1$  définie sur l'intervalle  $[0; 1]$  par :

$$f_1(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x.$$

(a) •  $f_1(0) = 0$  : évident ;

- $f_1(1) = 4 - 6 + 3 = 1$  ;
- $f_1$  fonction polynôme est dérivable sur  $[0; 1]$  donc continue sur cet intervalle ;
- $f_1'(x) = 12x^2 - 12x + 3 = 3(4x^2 - 4x + 1) = 3(2x - 1)^2 \geq 0$  sur  $\mathbb{R}$  donc sur  $[0; 1]$ .

$f_1$  est donc bien une fonction de retouche.

(b) Il semble que la courbe coupe la droite d'équation  $y = x$  pour  $x = 0,5$ .

On peut vérifier que  $f_1(0,5) = 0,5$ .

On a donc  $f_1(x) \leq x \iff x \geq 0,5$ .

Ce résultat signifie que  $f_1$  éclaircit les nuances codées par un nombre inférieur à 0,5 et inversement pour celles codées par un réel entre 0,5 et 1.

2. (a)  $f_2$  est une fonction dérivable car composée de fonctions dérivables, donc  $g$  l'est aussi et :

$$g'(x) = f_2'(x) - 1 = \frac{e-1}{1+(e-1)x} - 1 = \frac{e-1-1-(e-1)x}{1+(e-1)x} = \frac{(e-2)-(e-1)x}{1+(e-1)x}.$$

(b) Comme  $e > 1$ , le dénominateur est positif comme somme de termes positifs ; le signe de  $g'(x)$  est donc celui de son numérateur ; or

$$e-2-(e-1)x \geq 0 \iff e-2 \geq (e-1)x \iff \frac{e-2}{e-1} \geq x$$

On a  $\frac{e-2}{e-1} \approx 0,418$ .

On a donc avec  $\frac{e-2}{e-1} = a$ ,

$$g'(x) \geq 0 \iff x \leq a \text{ et de même}$$

$$g'(x) \leq 0 \iff x \geq a.$$

La fonction  $g$  est donc croissante sur  $[0; a]$ , puis décroissante sur  $[a; 1]$ .

$g$  a donc un maximum  $g(a) \approx 0,12$ .

(c) D'après la question précédente sur l'intervalle  $[0; a]$  la fonction  $g$  est continue et croissante de  $g(0) = 0$  à  $g(a) \approx 0,12$ .

Comme  $0,05 \in [0; a]$ , il existe une valeur unique  $\alpha$  de  $[0; a]$  telle que  $f(\alpha) = 0,05$ .

On démontre de même (avec  $g$  décroissante) que sur  $[a; 1]$  il existe un réel unique  $\beta$  tel que  $g(\beta) = 0,05$ .

On admettra que :  $0,08 < \alpha < 0,09$  et que :  $0,85 < \beta < 0,86$ .

### Partie B

1. Cet algorithme calcule le nombre de nuances par palier de 0,01 pour lesquelles la modification est perceptible visuellement.

2. On applique l'algorithme à la fonction  $g = f_2 - x$ . Il calcule toutes valeurs telles que  $g(x) \geq 0,05$ .

Ce sont d'après la question précédente toutes les nuances comprises entre 0,09 et 0,85 : l'algorithme doit donc retourner :  $c = 85 - 9 + 1 = 77$ .

### Partie C

1. (a)  $f_1$  produit de fonctions positives sur  $[0; 1]$  est positive sur cet intervalle. On a donc :

$$\mathcal{A}_{f_1} = \int_0^1 x e^{(x^2-1)} dx = \frac{1}{2} \left[ e^{(x^2-1)} \right]_0^1 = \frac{1}{2} (1 - e^{-1}).$$

(b) On a  $f_2(0) = -15 + 15 = 0$  et comme il est admis qu'elle est une fonction de retourche elle est croissante sur  $[0; 1]$ , donc positive sur cet intervalle. On a donc :

$$\mathcal{A}_{f_2} = \int_0^1 \left( 4x - 15 + \frac{60}{x+4} \right) dx = [2x^2 - 15x + 60 \ln(x+4)]_0^1 =$$

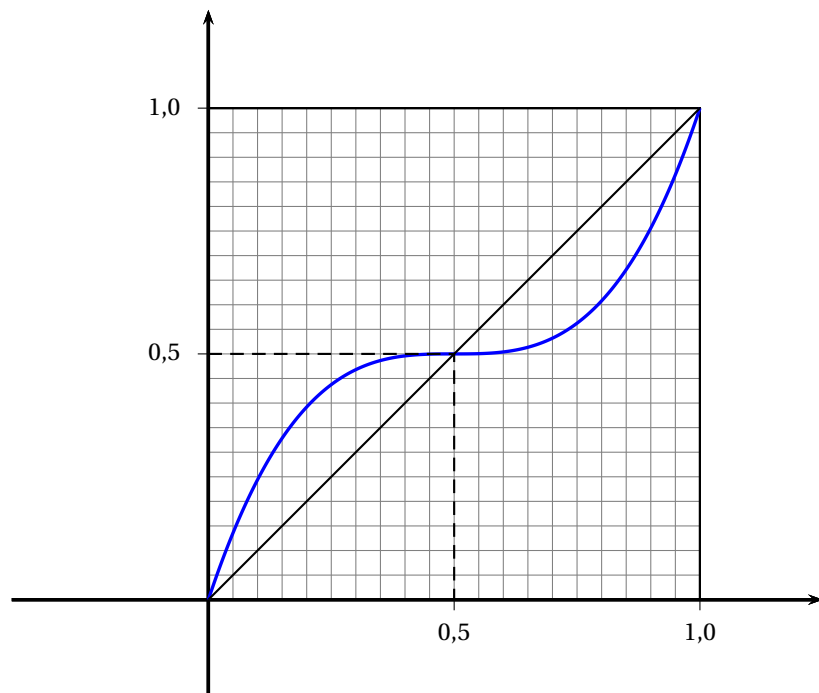
$$2 - 15 + 60 \ln 5 - 60 \ln 4 = -13 + 60 \ln \frac{5}{4}.$$

2. On a  $\mathcal{A}_{f_1} = \frac{1}{2}(1 - e^{-1}) \approx 0,316$  et  $\mathcal{A}_{f_2} = -13 + 60 \ln \frac{5}{4} \approx 0,389$ .

C'est la fonction  $f_1$  qui éclaircit le plus l'image.

### Annexe

Courbe représentative de la fonction  $f_1$



**EXERCICE 2**

énoncé

Asie 2012

1.

$n$	$u$	$v$	$a$	$b$
0	4	9	4	9
1	6,5	6,964	6,5	6,964
2	6,732	6,736	6,732	6,736

2. (a) Initialisation

Pour  $n = 0$ , on a bien  $u_0 > 0$  et  $v_0 > 0$ . L'hypothèse de récurrence est vérifiée pour  $n = 0$ .

Hérédité

Supposons que pour  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_n > 0$  et  $v_n > 0$ . Alors :

$$u_n + v_n > 0 \implies \frac{u_n + v_n}{2} > 0 \implies u_{n+1} > 0$$

$$u_n^2 > 0 \text{ et } v_n^2 > 0 \implies u_n^2 + v_n^2 > 0 \implies \frac{u_n^2 + v_n^2}{2} > 0 \implies \sqrt{\frac{u_n^2 + v_n^2}{2}} > 0 \implies v_{n+1} > 0$$

L'hypothèse de récurrence est donc vérifiée au rang  $n + 1$ .

Ainsi, d'après le théorème de récurrence, on en déduit que :  $u_n > 0$  et  $v_n > 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

(b) 
$$v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \frac{u_n^2 + v_n^2}{2} - \left(\frac{u_n + v_n}{2}\right)^2 = \frac{2u_n^2 + 2v_n^2}{4} - \frac{u_n^2 + 2u_nv_n + v_n^2}{4} = \frac{u_n^2 - 2u_nv_n + v_n^2}{4} =$$

$$\left(\frac{u_n - v_n}{2}\right)^2 = v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2.$$

D'où, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 \geq 0 \implies v_{n+1}^2 \geq u_{n+1}^2 \implies v_{n+1} \geq u_{n+1} \implies v_n \geq u_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Par construction,  $v_0 \geq u_0$ .

Conclusion :  $v_n \geq u_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

3. (a)  $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} \geq 0$  d'après la question précédente.

La suite  $(u_n)$  est donc croissante.

(b)  $0 < u_n \leq v_n \implies u_n^2 \leq v_n^2 \implies u_n^2 + v_n^2 \leq v_n^2 + v_n^2 \implies \frac{u_n^2 + v_n^2}{2} \leq v_n^2 \implies v_{n+1}^2 \leq v_n^2 \implies v_{n+1} \leq v_n$  (car les éléments de la suite  $v_n$  sont positifs).

La suite  $(v_n)$  est donc décroissante.

4. On a montré que :

- la suite  $u_n$  est croissante donc  $u_0 \leq u_n$  pour tout entier naturel  $n$ ,
- la suite  $v_n$  est décroissante donc  $v_n \leq v_0$  pour tout entier naturel  $n$ ,
- pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \leq v_n$ .

On en déduit que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$  d'où en particulier

$$\begin{cases} u_n \leq v_0 \\ v_n \leq u_0 \end{cases}$$

La suite  $(u_n)$  est croissante majorée par  $v_0$  donc, d'après théorème, elle est convergente.

La suite  $(v_n)$  est décroissante minorée par  $u_0$  donc, d'après théorème, elle est convergente.

Il s'agit, vous l'aurez compris, de suites adjacentes, car on peut démontrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$ .

**EXERCICE 3** énoncé **Métropole 2012**

**Commun à tous les candidats**

*Il est possible de traiter la partie C sans avoir traité la partie B.*

**Partie A**

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

1. •  $\frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}.$

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x+1} = 0$ , on a donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = 0.$

• On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$ , donc finalement par somme de limites :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$

2. Comme sur  $[1; +\infty[$ ,  $x+1 > 0$ , et  $\frac{x}{x+1} > 0$  la fonction  $f$  est la somme de deux fonctions dérivables sur  $[1; +\infty[$  et sur cet intervalle :

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{u'(x)}{u(x)} \text{ avec } u(x) = \frac{x}{x+1}.$$

Or  $u'(x) = \frac{1 \times (x+1) - x \times 1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}.$

Donc  $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{x}{x+1}} = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x(x+1)} = \frac{-x+x+1}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x(x+1)^2}.$

Comme  $x \geq 1$ , la dérivée est clairement positive, donc la fonction est croissante sur  $[1; +\infty[$  de  $f(1) = \frac{1}{2} + \ln \frac{1}{2} \approx -0,193$  à 0 sa limite en plus l'infini.

3. Le tableau montre que  $f(x) < 0$  sur  $[1; +\infty[$ .

**Partie B**

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots - \ln n.$$

1. L'algorithme donne successivement pour  $u$  les valeurs :

$$0 + 1 = 1$$

$$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6} \text{ valeur qu'il affiche.}$$

2. Il suffit de modifier la sortie en : Afficher  $u - \ln n$ .

3. On peut conjecturer que pour  $n$  allant de 4 à 2000 la suite est décroissante et converge vers une valeur proche de 0,577.

**Partie C**

1. On a  $u_{n+1} - u_n = \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1)\right] - \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\right] = \frac{1}{n+1} + \ln n - \ln(n+1) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = f(n).$  On a vu que pour  $x \geq 1, f(x) < 0$ , donc  $u_{n+1} - u_n = f(n) < 0$  montre que  $u_{n+1} < u_n$ , ce qui signifie que la suite  $(u_n)$  est décroissante.

2. (a) Puisqu'on intègre de  $k$  strictement positif à  $k+1$ , on a donc

$$0 < k \leq x \leq k+1 \iff 0 < \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$$

On a donc en particulier  $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{k} \iff \frac{1}{k} - \frac{1}{x} \geq 0$ . L'intégrale sur  $[k; k+1]$  de la fonction continue et positive est un nombre positif.

•  $\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x}\right) dx \geq 0 \iff \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dx \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx$  (par linéarité de l'intégrale).

Or  $\int_k^{k+1} \frac{1}{k} dx = \frac{1}{k} \times (k+1 - k) = \frac{1}{k}.$

L'inégalité précédente s'écrit donc :  $\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}.$

• On a  $\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_k^{k+1} = \ln(k+1) - \ln k.$

Donc l'inégalité précédente s'écrit  $\ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$  (1)

(b) On obtient la suite des inégalités suivante :

$$\ln(1+1) - \ln 1 \leq \frac{1}{1}$$

$$\ln(2+1) - \ln 2 \leq \frac{1}{2}$$

$$\ln(3+1) - \ln 3 \leq \frac{1}{3}$$

.....

$$\ln(n) - \ln(n-1) \leq \frac{1}{n-1}$$

$$\ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n}$$

D'où par somme membres à membres et effet de « dominos » :

$$\ln(n+1) - \ln 1 \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \text{ ou encore}$$

$$\ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

(c) La fonction  $\ln$  étant croissante, on a  $\ln n < \ln(n+1)$  et comme  $\ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$  on en déduit que  $\ln n < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \iff 0 < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$ , soit finalement  $u_n > 0$ .

3. On a vu que la suite est décroissante et ensuite qu'elle est minorée par 0 : elle converge donc vers une limite supérieure à zéro.

**EXERCICE 4** énoncé **Métropole septembre 2012**

Commun à tous les candidats

1.  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et sur cet intervalle :

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{7}{x^2} \right) = \frac{1}{2x^2} (x^2 - 7) \text{ qui est du signe de } x^2 - 7.$$

$$\text{Donc } f'(x) = 0 \iff x^2 - 7 = 0 \iff (x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7}) = 0 \iff x = \sqrt{7} \text{ ou } x = -\sqrt{7}.$$

Il y a donc une solution dans l'intervalle  $]0; +\infty[$  :  $\sqrt{7}$ .

Le trinôme  $x^2 - 7$  est positif sauf entre ses racines donc ici sur  $]0; \sqrt{7}[$ .

Conclusion :  $f$  est décroissante sur  $]0; \sqrt{7}[$  puis croissante sur  $]\sqrt{7}; +\infty[$  ; donc  $f(\sqrt{7})$  est le minimum de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .

$f(\sqrt{7}) = \frac{1}{2} \left( \sqrt{7} + \frac{7}{\sqrt{7}} \right) = \frac{1}{2} (\sqrt{7} + \sqrt{7}) = \sqrt{7}$ . Par définition du minimum, on a donc pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \geq \sqrt{7}$  y compris  $u_0 = 3$ , car  $3^2 > 7$ .

$$2. \text{ (a) } u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{7}{u_n} \right) - u_n = \frac{1}{2} \left( \frac{7}{u_n} - u_n \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{7 - u_n^2}{u_n} \right).$$

Comme  $\frac{1}{2} > 0$ ,  $u_n > 0$  et que  $u_n \geq \sqrt{7} \implies u_n^2 \geq 7 \implies u_n^2 - 7 \geq 0 \implies 7 - u_n^2 \leq 0$ , on en conclut que

$$u_{n+1} - u_n \leq 0$$

Donc la suite  $(u_n)$  est décroissante.

(b) La suite  $(u_n)$  étant décroissante et minorée par  $\sqrt{7}$  est donc convergente vers une limite supérieure ou égale à  $\sqrt{7}$ .

(c)  $\ell = \frac{1}{2} \left( \ell + \frac{7}{\ell} \right) \iff 2\ell = \ell + \frac{7}{\ell} \iff \ell = \frac{7}{\ell} \iff \ell^2 = 7 \iff \ell = \sqrt{7}$  (puisque la limite est positive).

$$3. u_{n+1} - \sqrt{7} = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{7}{u_n} \right) - \sqrt{7} = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{7}{u_n} - 2\sqrt{7} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{u_n^2 + 7 - 2u_n\sqrt{7}}{u_n} \right) = \frac{1}{2} \frac{(u_n - \sqrt{7})^2}{u_n}.$$

(identité remarquable)

4. (a) Initialisation :  $u_0 - \sqrt{7} = 3 - \sqrt{7} \approx 0,35$  et  $d_0 = 1$ .

On a bien  $u_0 - \sqrt{7} \leq d_0$ .

Hérédité :

Remarque préliminaire : on a démontré que  $u_n \geq \sqrt{7}$ , donc  $u_n > 1$  ou encore  $\frac{1}{u_n} < 1$  (2).

Supposons qu'il existe un naturel  $n$  tel que  $u_n - \sqrt{7} \leq d_n$ .

On a démontré à la question 3 que :

$u_{n+1} - \sqrt{7} = \frac{1}{2} \frac{(u_n - \sqrt{7})^2}{u_n}$ . Donc comme  $u_n - \sqrt{7} \leq d_n \implies (u_n - \sqrt{7})^2 \leq d_n^2$ , l'égalité du 3 donne :

$$u_{n+1} - \sqrt{7} < \frac{1}{2} d_n^2 \times \frac{1}{u_n} < \frac{1}{2} d_n^2 \text{ d'après l'inégalité (2) ci-dessus.}$$

$$\text{Finalement } u_{n+1} - \sqrt{7} < \frac{1}{2} d_n^2 \iff u_{n+1} - \sqrt{7} < d_{n+1}.$$

L'hérédité est établie.

Pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_n - \sqrt{7} \leq d_n.$$

(b) L'algorithme indique que pour que  $d_n \leq 10^{-9}$  il faut que  $n \geq 5$ .

On a donc  $d_5 \leq 10^{-9}$ .

Comme  $u_5 - \sqrt{7} < d_5$  c'est-à-dire  $u_5 - \sqrt{7} < 10^{-9}$ , on en déduit que  $u_5$  est une valeur approchée par excès de  $\sqrt{7}$  à  $10^{-9}$  près.

**EXERCICE 5** énoncé Polynésie 2012

**Partie A**

Lorsque  $N = 3$  l'algorithme effectue trois boucles avant de s'arrêter. À la fin de la boucle pour  $k = 0$  on a  $U = 3$  ; à la fin de la boucle  $k = 1$  on a  $U = 10$  et à la fin de la boucle correspondant à  $k = 2$  on obtient  $U = 29$ .

L'affichage en sortie est donc 29.

**Partie B**

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 0$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$ .

1.  $u_1 = 3$  et  $u_2 = 10$ .

2. (a) Démontrons par récurrence, pour tout entier naturel  $n$ , la propriété  $P_n : u_n \geq n$ .

- $u_0 = 0 \geq 0$  donc la propriété  $P_0$  est vérifiée.
- Supposons la propriété  $P_n$  vraie pour une valeur de  $n$  fixée.  
 $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3 \geq 3n - 2n + 3 \geq n + 3 \geq n + 1$  la propriété est donc alors vérifiée au rang  $n + 1$ .
- Conclusion : D'après la propriété de récurrence on en déduit que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \geq n$ .

(b) d'après le théorème de comparaison  $\lim(u_n) = +\infty$ .

3. Pour tout entier naturel  $n$  ;  $u_{n+1} - u_n = 3u_n - 2n + 3 - u_n = 2u_n - 2n + 3 \geq 3 \geq 0$  donc la suite  $(u_n)$  est croissante.

4. Soit la suite  $(v_n)$  définie, pour tout entier naturel  $n$ , par  $v_n = u_n - n + 1$ .

(a) Pour tout entier naturel  $n$   $v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) + 1 = 3u_n - 2n + 3 - n - 1 + 1 = 3(u_n - n + 1) = 3v_n$ .

La suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de premier terme  $v_0 = 1$  et de raison 3.

(b) Pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n = 3^n$  et  $u_n = v_n + n - 1$  donc  $u_n = 3^n + n - 1$ .

5. Soit  $p$  un entier naturel non nul.

(a) La suite  $(u_n)$  tend vers  $+\infty$  donc on peut affirmer qu'il existe au moins un entier  $n_0$  tel que, pour tout  $n \geq n_0$ ,  $u_n \geq 10^p$ .

(b)  $u_{3p} = 3^{3p} + 3p - 1 = 27^p + 3p - 1 \geq 27^p \geq 10^p$  donc  $n = 3p$  est une valeur de  $n$  telle que  $u_n \geq 10^p$  ;  $n_0$  étant la plus petite de ces valeurs, on a donc  $n_0 \leq 3p$

(c)  $u_6 = 734$  et  $u_7 = 2193$  donc pour la valeur  $p = 3$  ;  $n_0 = 7$ .

(d) Algorithme qui, pour une valeur de  $p$  donnée en entrée, affiche en sortie la valeur du plus petit entier  $n_0$  tel que, pour tout  $n \geq n_0$ , on ait  $u_n \geq 10^p$ .

**Entrée**

Saisir le nombre entier naturel non nul  $p$ .

**Traitement**

Affecter à  $U$  la valeur 0

Affecter à  $k$  la valeur 0

Tant que  $U < 10^p$

Affecter à  $U$  la valeur  $3U - 2k + 3$

Affecter à  $k$  la valeur  $k + 1$

Fin tant que

**Sortie**

Afficher  $k$

**EXERCICE 6** énoncé Asie 2013

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

**Partie A**

1. *Initialisation* : la relation est vraie au rang 0 ;

*Hérédité* : supposons qu'il existe un naturel  $p$  tel que  $u_p > 1$ .

$$\frac{1+3u_p}{3+u_p} = \frac{3+u_p-2+2u_p}{3+u_p} = \frac{(3+u_p)+(2u_p-2)}{3+u_p} = 1 + 2\frac{u_p-1}{3+u_p}.$$

Par hypothèse de récurrence on a :

$$u_p - 1 \text{ et comme } u_p > 1, 3 + u_p > 4 > 0 \text{ donc son inverse } \frac{1}{3 + u_p} > 0 \text{ et finalement } \frac{u_p - 1}{3 + u_p} > 0,$$

$$\text{c'est-à-dire que } u_{p+1} = \frac{1+3u_p}{3+u_p} > 1$$

Conclusion : on a démontré par récurrence que quel que soit le naturel  $n$ ,  $u_n > 1$ .

2. (a) Quel que soit le naturel  $n$ ,  $u_{n+1} - u_n = \frac{1+3u_n}{3+u_n} - u_n = \frac{1+3u_n-3u_n-u_n^2}{3+u_n} = \frac{1-u_n^2}{3+u_n} = \frac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}.$

(b) On sait que quel que soit le naturel  $n$ ,  $u_n > 1 \implies u_n^2 > 1^2 \implies 1 - u_n^2 < 0$  et comme  $3 + u_n > 0$  et finalement  $u_{n+1} - u_n < 0$  ce qui signifie que la suite  $(u_n)$  est décroissante.

La suite  $(u_n)$  est décroissante et minorée par 1 : elle converge vers une limite supérieure ou égale à 1.

**Partie B**

1.

$i$	1	2	3
$u$	0,800	1,077	0,976

2. Il semble que la suite converge vers 1 par valeurs alternativement supérieures et inférieures.

3. (a) 
$$V_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{1+0,5u_n}{0,5+u_n} - 1}{\frac{1+0,5u_n}{0,5+u_n} + 1} = \frac{0,5 - 0,5u_n}{1,5 + 1,5u_n} = \frac{-0,5(u_n - 1)}{1,5(u_n + 1)} = -\frac{1}{3}v_n.$$

La suite  $(v_n)$  est donc géométrique de raison  $-\frac{1}{3}$ .

(b) On a  $v_0 = \frac{2-1}{2+3} = \frac{1}{3}.$

On sait qu'alors pour tout naturel  $n$ ,  $v_n = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n.$

4. (a) Quel que soit le naturel  $n$ ,  $\left(-\frac{1}{3}\right)^n \leq 1$ , donc  $v_n \leq \frac{1}{3}$  et par conséquent  $v_n \neq 1$ .

(b)  $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1} \iff v_n(u_n + 1) = u_n - 1 \iff v_n u_n + v_n = u_n - 1 \iff v_n u_n - u_n + = -1 - v_n \iff u_n(v_n - 1) = -1 - v_n$  et comme  $v_n \neq 1$ ,

$$u_n = \frac{-1 - v_n}{v_n - 1} = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}.$$

(c) Comme  $-1 < -\frac{1}{3} < 1$ , on sait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0$ , soit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ , donc d'après le résultat précédent  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{1} = 1.$

**EXERCICE 7** énoncé Centres Étrangers 2013

Candidats n'ayant pas choisi la spécialité mathématique

**Partie A - Algorithmique et conjectures**

1. Affecter à  $u$  la valeur  $\frac{n \times u_n + 1}{2(n+1)}$

Affecter à  $n$  la valeur  $n + 1$ .

2. Il faut rajouter avant le Fin Tant que : « Afficher la variable  $u$  ».

3. La suite  $(u_n)$  semble être décroissante vers 0.

**Partie B - Étude mathématique**

1. Pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $v_{n+1} = nu_{n+1} - 1 = (n+1) \times \frac{n \times u_n + 1}{2(n+1)} - 1 = \frac{n \times u_n + 1}{2} - \frac{2}{2} = \frac{n \times u_n - 1}{2} = \frac{1}{2} v_n$ .

Cette relation montre que la suite  $(v_n)$  est géométrique de raison  $\frac{1}{2}$  et de premier terme

$$v_0 = 1 \times u_1 - 1 = \frac{1}{2}.$$

2. On a donc pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $v_{n+1} = 0,5 \times 0,5^{n-1} = 0,5^n$ .

$$\text{Or } v_n = nu_n - 1 \iff u_n = \frac{v_n + 1}{n} = \frac{1 + 0,5^n}{n}.$$

3. Comme  $-1 < 0,5 < 1$ , on sait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^n = 0$ , et comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ , on a donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

4. Pour tout entier  $n \geq 1$ , on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1 + (0,5)^{n+1}}{n+1} - \frac{1 + (0,5)^n}{n} = \frac{n + n \times 0,5^{n+1} - (n+1) - (n+1) \times 0,5^n}{n(n+1)} = \\ &= \frac{-1 + 0,5n \times 0,5^n - (n+1) \times 0,5^n}{n(n+1)} = \frac{-1 + 0,5^n(0,5n - n - 1)}{n(n+1)} = \frac{-1 + 0,5^n(-0,5n - 1)}{n(n+1)} = \\ &= -\frac{1 + (1 + 0,5n)(0,5)^n}{n(n+1)}. \end{aligned}$$

Les deux termes du quotient sont supérieurs à zéro, donc pour tout entier  $n \geq 1$ , on a :

$u_{n+1} - u_n < 0$ , ce qui démontre que la suite  $(u_n)$  est décroissante (vers zéro).

**Partie C - Retour à l'algorithmique**

Variables	$n$ est un entier naturel $u$ est un réel
Initialisation	Affecter à $n$ la valeur 1 Affecter à $u$ la valeur 1,5
Traitement	Tant que $u \geq 0,001$ Affecter à $u$ la valeur $\frac{n \times u + 1}{2(n+1)}$ Affecter à $n$ la valeur $n + 1$
	Fin Tant que
Sortie	Afficher la variable $n$

### EXERCICE 8

énoncé

Liban 2013

#### Partie A

1. L'algorithme n° 1 calcule tous les termes de  $v_0$  à  $v_n$  mais n'affiche que le dernier  $v_n$ .

L'algorithme n° 2 calcule  $n$  fois de suite  $v_1$  à partir de  $v_0$  : il ne calcule pas les termes de 0 à  $v_n$ .

L'algorithme n° 3 calcule tous les termes de 0 à  $v_n$  et les affiche tous.

2. D'après les tables de valeurs de la suite (qui correspond en fait à  $n = 9$ ), il semblerait que la suite soit croissante et converge vers un nombre proche de 3.

3. (a) Montrons par récurrence la propriété  $P_n : 0 < v_n < 3$  pour tout entier naturel  $n$ .

*Initialisation* :  $n = 0$ , on a bien  $0 < v_0 < 3$  vraie, puisque  $v_0 = 1$  ; ainsi  $P_0$  est vraie.

*Hérédité* : Supposons  $P_n$  vraie, montrons alors que  $P_{n+1}$  est vraie.

On suppose donc que  $0 < v_n < 3$ .

Donc  $6 = 6 - 0 > 6 - v_n > 6 - 3 = 3$ , puis

$$\frac{1}{6} < \frac{1}{6 - v_n} < \frac{1}{3}, \text{ car la fonction inverse est décroissante sur } ]0 ; +\infty[.$$

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{9}{6} < \frac{9}{6 - v_n} < \frac{9}{3} = 3.$$

Ainsi  $1 < \frac{3}{2} < v_{n+1} < 3$ . L'hérédité est établie puisque  $P_{n+1}$  est vraie.

**Conclusion**

Par le principe de récurrence,  $P_n : 0 < v_n < 3$  est vraie pour tout entier naturel  $n$ .

(b) 
$$v_{n+1} - v_n = \frac{9}{6 - v_n} - v_n = \frac{9 - v_n(6 - v_n)}{6 - v_n} = \frac{(v_n - 3)^2}{6 - v_n}.$$

Or, d'après la question précédente,  $0 < v_n < 3$  pour tout  $n$  entier naturel, ainsi  $6 - v_n$  est positif, donc  $v_{n+1} - v_n = \frac{(v_n - 3)^2}{6 - v_n} > 0$ , ainsi la suite  $(v_n)$  est croissante.

(c) Comme la suite est majorée par 3 et croissante, alors elle converge vers une limite inférieure ou égale à 3.

#### Partie B

1. 
$$w_{n+1} - w_n = \frac{1}{v_{n+1} - 3} - \frac{1}{v_n - 3} = \frac{1}{\frac{9}{6 - v_n} - 3} - \frac{1}{v_n - 3} = \frac{6 - v_n}{3v_n - 9} - \frac{1}{v_n - 3} = \frac{6 - v_n - 3}{3v_n - 9} = \frac{-v_n + 3}{3(v_n - 3)} = -\frac{1}{3}.$$

Ainsi la suite  $(w_n)$  est arithmétique de raison  $r = -\frac{1}{3}$ .

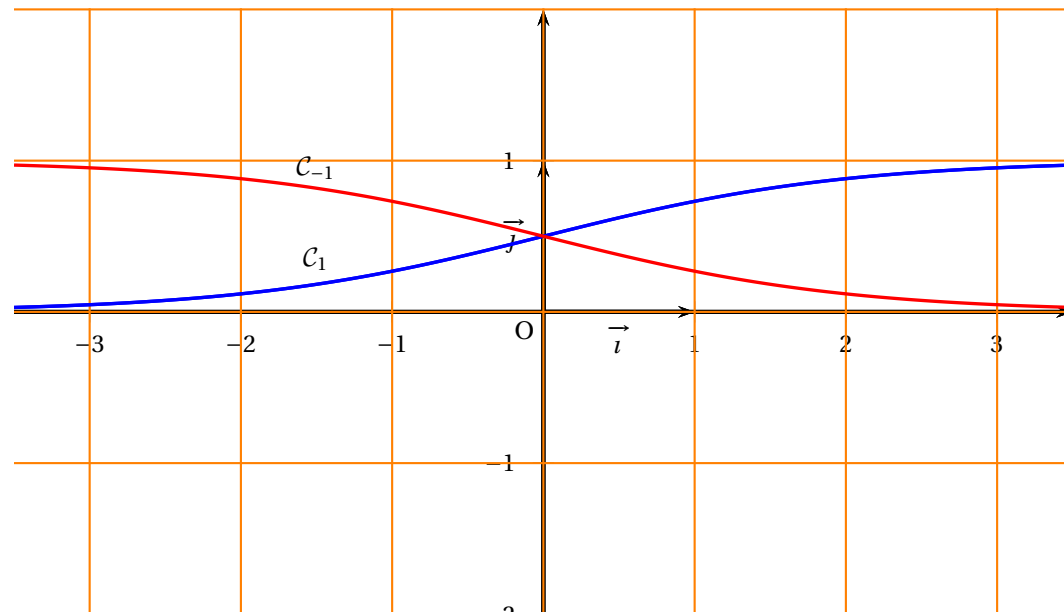
2. 
$$w_n = w_0 + nr = \frac{1}{1 - 3} - \frac{1}{3}n = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3}n.$$

Comme  $w_n = \frac{1}{v_n - 3}$ , on a  $v_n = \frac{1}{w_n} + 3 = \frac{1}{-\frac{1}{2} - \frac{1}{3}n} + 3 = \frac{6}{-3 - 2n} + 3$ .

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6}{-3 - 2n} = 0$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 3$ .

#### ANNEXE à rendre avec la copie

Représentations graphiques  $C_1$  et  $C_{-1}$  des fonctions  $f_1$  et  $f_{-1}$



**EXERCICE 9** énoncé Nouvelle Calédonie 2013

Commun à tous les candidats

Soient deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies par  $u_0 = 2$  et  $v_0 = 10$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$$

**PARTIE A**

**Variables :** N est un entier  
 U, V, W sont des réels  
 K est un entier

**Début :** Affecter 0 à K  
 Affecter 2 à U  
 Affecter 10 à V  
 Saisir N  
 Tant que K < N

Affecter K + 1 à K  
 Affecter U à W  
 Affecter  $\frac{2U + V}{3}$  à U  
 Affecter  $\frac{W + 3V}{4}$  à V

Fin tant que  
 Afficher U  
 Afficher V

**Fin**

État des variables :

K	W	U	V
0	---	2	10
1	2	14/3	8
2	14/3	52/9	43/6

**PARTIE B**

1. (a) Pour tout entier naturel  $n$ ,

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} - \frac{2u_n + v_n}{3} = \frac{3(u_n + 3v_n)}{12} - \frac{4(2u_n + v_n)}{12}$$

$$= \frac{3u_n + 9v_n - 8u_n - 4v_n}{12} = \frac{5v_n - 5u_n}{12} = \frac{5}{12}(v_n - u_n)$$

(b) Pour tout entier naturel  $n$  on pose  $w_n = v_n - u_n$ .

D'après la question précédente, on peut dire que la suite  $(w_n)$  est géométrique de raison  $\frac{5}{12}$  et de premier terme  $w_0 = v_0 - u_0 = 10 - 2 = 8$ .

D'après le cours (forme explicite d'une suite géométrique) on peut dire que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $w_n = 8 \left(\frac{5}{12}\right)^n$ .

2. (a)  $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n + v_n}{3} - \frac{3u_n}{3} = \frac{2u_n + v_n - 3u_n}{3} = \frac{v_n - u_n}{3} = \frac{w_n}{3}$

On a vu que, pour tout  $n$ ,  $w_n = 8 \left(\frac{5}{12}\right)^n$  ; on peut en déduire que pour tout  $n$ ,  $w_n > 0$  et donc que, pour tout  $n$ ,  $u_{n+1} - u_n > 0$ .

Donc la suite  $(u_n)$  est croissante.

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 3v_n}{4} - \frac{4v_n}{4} = \frac{u_n + 3v_n - 4v_n}{4} = \frac{u_n - v_n}{4} = \frac{-w_n}{4}$$

Et comme  $w_n > 0$ , on peut dire que  $v_{n+1} - v_n < 0$  pour tout  $n$ .

Donc la suite  $(v_n)$  est décroissante.

(b) On a vu que, pour tout  $n$ ,  $w_n > 0$  ; donc, pour tout  $n$ ,  $v_n - u_n > 0$  c'est-à-dire  $v_n > u_n$ .

La suite  $(v_n)$  est décroissante donc, pour tout  $n$ ,  $v_n \leq v_0 \iff v_n \leq 10$ .

$$\text{Pour tout entier naturel } n, \left. \begin{array}{l} v_n > u_n \\ v_n \leq 10 \end{array} \right\} \implies u_n \leq 10.$$

La suite  $(u_n)$  est croissante donc pour tout  $n$ ,  $u_n \geq u_0 \iff u_n \geq 2$ .

$$\text{Pour tout entier naturel } n, \left. \begin{array}{l} v_n > u_n \\ u_n \geq 2 \end{array} \right\} \implies v_n \geq 2.$$

(c) La suite  $(u_n)$  est croissante majorée par 10 donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite  $(u_n)$  est convergente vers un réel  $\ell_u$ .

La suite  $(v_n)$  est décroissante minorée par 2 donc, d'après ce même théorème, la suite  $(v_n)$  est convergente vers un réel  $\ell_v$ .

3. La suite  $(w_n)$ , définie par  $w_n = v_n - u_n$ , est convergente comme différence de deux suites convergentes, et sa limite est égale à  $\ell_v - \ell_u$ .

Or la suite  $(w_n)$  est géométrique de raison  $\frac{5}{12}$  et  $-1 < \frac{5}{12} < 1$  ; donc on peut dire que la suite  $(w_n)$  est convergente vers 0.

La limite d'une suite est unique donc  $\ell_v - \ell_u = 0$  et donc  $\ell_v = \ell_u$  ; les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  ont donc la même limite qu'on appelle  $\ell$ .

$$\begin{aligned} 4. \quad t_{n+1} &= 3u_{n+1} + 4v_{n+1} = 3 \times \frac{2u_n + v_n}{3} + 4 \times \frac{u_n + 3v_n}{4} = 2u_n + v_n + u_n + 3v_n \\ &= 3u_n + 4v_n = t_n \text{ donc la suite } (t_n) \text{ est constante.} \end{aligned}$$

$$t_0 = 3u_0 + 4v_0 = 3 \times 2 + 4 \times 10 = 6 + 40 = 46$$

Comme la suite  $(t_n)$  est constante, pour tout  $n$ ,  $t_n = t_0 = 46$  ; la suite  $(t_n)$  est donc convergente vers 46.

Les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont toutes les deux convergentes vers  $\ell$  donc la suite  $(t_n)$  définie par  $t_n = 3u_n + 4v_n$  est convergente vers  $3\ell + 4\ell = 7\ell$ .

$$\text{La limite d'une suite est unique donc } 7\ell = 46 \iff \ell = \frac{46}{7}.$$

$$\text{La limite commune des suites } (u_n) \text{ et } (v_n) \text{ est donc } \frac{46}{7}.$$

**EXERCICE 10** énoncé Amérique du Nord 2014

**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Un volume constant de  $2\,200\text{ m}^3$  d'eau est réparti entre deux bassins A et B.

1. « Un volume constant de  $2\,200\text{ m}^3$  d'eau est réparti entre deux bassins A et B. » donc

Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $a_n + b_n = 2200$ .

2. Au début du  $n + 1$ -ième jour, la bassin A contient  $a_n$ , on ajoute 15 % du volume d'eau présent dans le bassin B soit  $0,15b_n$  et on enlève 10 % du volume présent dans A au début de la journée :

$$a_{n+1} = a_n + 0,15b_n - 0,1a_n = a_n + 0,15(2200 - a_n) - 0,1a_n = 0,75a_n + 330 = \frac{3}{4}a_n + 330$$

On a bien, pour tout entier naturel  $n$ ,  $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + 330$ .

3.

<b>Variables</b>	: $n$ est un entier naturel $a$ est un réel		
<b>Initialisation</b>	: Affecter à $n$ la valeur 0 Affecter à $a$ la valeur 800		
<b>Traitement</b>	: Tant que $a < 1100$ , faire : <table style="margin-left: 20px; border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;">Affecter à <math>a</math> la valeur <math>\frac{3}{4}a + 330</math></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">Affecter à <math>n</math> la valeur <math>n + 1</math></td> </tr> </table> Fin Tant que	Affecter à $a$ la valeur $\frac{3}{4}a + 330$	Affecter à $n$ la valeur $n + 1$
Affecter à $a$ la valeur $\frac{3}{4}a + 330$			
Affecter à $n$ la valeur $n + 1$			
<b>Sortie</b>	: Afficher $n$		

4. (a) Remarque : on peut calculer les premiers termes pour avoir la raison.

Pour tout entier naturel  $n$ , on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= a_{n+1} - 1320 && \text{définition de } u_n \\ &= \frac{3}{4}a_n + 330 - 1320 && \text{question 2.} \\ &= \frac{3}{4}a_n - 990 \\ &= \frac{3}{4}(a_n - 1320) \\ &= \frac{3}{4}u_n && \text{définition de } u_n \end{aligned}$$

On reconnaît la définition d'une suite géométrique de raison  $\frac{3}{4}$ .

Son premier terme est  $u_0 = a_0 - 1320 = 800 - 1320 = -520$

(b) On a donc, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = u_0q^n = -520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$ .

Mais, par définition de  $u_n$ , on a

$$u_n = a_n - 1320 \Leftrightarrow a_n = u_n + 1320 \text{ donc } a_n = 1320 - 520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

5. On cherche à savoir si, un jour donné, les deux bassins peuvent avoir, au mètre cube près, le même volume d'eau.

Si ce jour arrive, on aura  $a_n = b_n = \frac{2200}{2} = 1100$ .

Il faut donc résoudre l'équation  $1320 - 520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = 1100$  d'inconnue  $n$ .

$$1320 - 520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = 1100 \Leftrightarrow 520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = 220 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{11}{26} \Leftrightarrow n \ln\left(\frac{3}{4}\right) = \ln\left(\frac{11}{26}\right)$$

$$\text{Finalement } n = \frac{\ln\left(\frac{11}{26}\right)}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)} \approx 2,99$$

On vérifie :  $a_3 = 1100,625$  et  $b_3 = 1099,375$  donc  $a_3 - b_3 = 1,25 > 1$ .

Les deux bassins n'auront donc jamais le même volume d'eau, à un mètre cube près.

**EXERCICE 11** énoncé Antilles 2014

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. (a) À l'aide d'une calculatrice, on obtient les valeurs suivantes :

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$u_n$	2	3,4	2,18	1,19	0,61	0,31	0,16	0,08	0,04

(b) Au vu du tableau précédent, on peut conjecturer que la suite  $(u_n)$  est décroissante à partir du rang 1.

2. (a) Soit  $\mathcal{P}(n)$  la propriété : «  $u_n \geq \frac{15}{4} \times 0,5^n$  ». Montrons par récurrence que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout entier naturel  $n$  non nul.

- **Initialisation.** On a  $u_1 = 3,4$  et  $\frac{15}{4} \times 0,5 = 1,875$ , donc  $\mathcal{P}(1)$  est vraie.
- **Hérédité.** Supposons que, pour un certain entier naturel  $k$  non nul, la propriété  $\mathcal{P}(k)$  est vraie, c'est-à-dire que :

$$u_k \geq \frac{15}{4} \times 0,5^k \tag{HR}$$

on doit alors démontrer que la propriété  $\mathcal{P}(k+1)$  est vraie, c'est-à-dire que  $u_{k+1} \geq \frac{15}{4} \times 0,5^{k+1}$ .

D'après (HR) :

$$\begin{aligned}
 u_k &\geq \frac{15}{4} \times 0,5^k && \text{donc, en multipliant par } \frac{1}{5} : \\
 \frac{1}{5} u_k &\geq \frac{3}{4} \times 0,5^k && \text{puis, en ajoutant membre à membre } 3 \times 0,5^k : \\
 \frac{1}{5} u_k + 3 \times 0,5^k &\geq \frac{3}{4} \times 0,5^k + 3 \times 0,5^k && \text{c'est-à-dire :} \\
 u_{k+1} &\geq \frac{15}{4} \times 0,5^k
 \end{aligned}$$

Or, pour tout entier naturel  $k$ ,  $0,5^k \geq 0,5^{k+1}$ , on en déduit donc que :

$$u_{k+1} \geq \frac{15}{4} \times 0,5^{k+1}$$

et la propriété  $\mathcal{P}(n)$  est donc héréditaire.

□ **Conclusion.** La propriété  $\mathcal{P}(n)$  est initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier naturel  $n$  non nul.

(b) Pour tout entier naturel  $n$  non nul :

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{5} u_n + 3 \times 0,5^n - u_n \\
 &= 3 \times 0,5^n - \frac{4}{5} u_n \\
 &= \frac{4}{5} \left( \frac{15}{4} \times 0,5^n - u_n \right)
 \end{aligned}$$

D'après la question 1a, cela entraîne que  $u_{n+1} - u_n \leq 0$ .

(c) D'après la question précédente la suite  $(u_n)$  est décroissante à partir d'un certain rang. D'après 2a, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $u_n \geq \frac{15}{4} \times 0,5^n > 0$ , la suite est donc minorée. On en déduit, d'après le théorème de convergence des suites monotones, que la suite  $(u_n)$  est convergente.

3. (a) Soit  $n \in \mathbb{N}$ , alors :

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} &= u_{n+1} - 10 \times 0,5^{n+1} \\
 &= \frac{1}{5} u_n + 3 \times 0,5^n - 10 \times 0,5 \times 0,5^n \\
 &= \frac{1}{5} u_n - 2 \times 0,5^n \\
 &= \frac{1}{5} (u_n - 10 \times 0,5^n) \\
 &= \frac{1}{5} v_n.
 \end{aligned}$$

La suite  $(v_n)$  est donc géométrique de raison  $\frac{1}{5}$ .

Son premier terme vaut  $v_0 = u_0 - 10 \times 0,5^0 = 2 - 10 = -8$ .

(b) La suite  $(v_n)$  étant géométrique, on a, pour tout entier naturel  $n$  :  $v_n = -8 \left(\frac{1}{5}\right)^n$ .

On en déduit que  $-8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n = u_n - 10 \times 0,5^n$  et donc que :  $u_n = -8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + 10 \times 0,5^n$ .

(c)  $-1 < \frac{1}{5} < 1$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$ , de même :  $-1 < 0,5 < 1$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^n = 0$ .

On en déduit par opérations sur les limites que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

4. L'algorithme complet est :

<b>Entrée :</b>	$n$ et $u$ sont des nombres
<b>Initialisation :</b>	$n$ prend la valeur 0 $u$ prend la valeur 2
<b>Traitement :</b>	Tant que $u > 0,01$ (1) $n$ prend la valeur $n + 1$ (2) $u$ prend la valeur $\frac{1}{5}u + 3 \times 0,5^{n-1}$ (3) Fin Tant que
<b>Sortie :</b>	Afficher $n$



Déclaration des variables :  $S$  et  $u$  sont des nombres réels  
 $k$  est un nombre entier

Initialisation :  $u$  prend la valeur  $1$   
 $S$  prend la valeur  $u$

Traitement : Pour  $k$  variant de  $1$  à  $100$   
 $u$  prend la valeur  $u \times e^{-u}$   
 $S$  prend la valeur  $S + u$

Fin Pour  
Afficher  $S$

**EXERCICE 13** énoncé **Métropole septembre 2014**

**Commun à tous les candidats**

On administre à un patient un médicament par injection intraveineuse. La quantité de médicament dans le sang diminue en fonction du temps.

1. On effectue à l'instant 0 une injection de 10 mL de médicament. On estime que 20 % du médicament est éliminé par minute. Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $u_n$  la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang au bout de  $n$  minutes. Ainsi  $u_0 = 10$ .

(a) Comme 20 % du médicament est éliminé par minute, il en reste 80 % ; prendre 80 % d'un nombre c'est multiplier par 0,8 donc  $u_{n+1} = 0,8 u_n$ .

Donc la suite  $(u_n)$  est géométrique de raison 0,8 et de premier terme  $u_0 = 10$ .

(b) La suite  $(u_n)$  es géométrique, donc pour tout  $n$ ,  $u_n = u_0 \times q^n = 10 \times 0,8^n$ .

(c) La quantité de médicament est inférieure à 1 % de la quantité initiale quand  $u_n < \frac{1}{100} \times u_0$  c'est-à-dire  $u_n < 0,1$ .

On résout l'inéquation :

$$\begin{aligned}
 u_n < 0,1 &\iff 10 \times 0,8^n < 0,1 \\
 &\iff 0,8^n < 0,01 \\
 &\iff \ln(0,8^n) < \ln 0,01 \quad \text{croissance de la fonction } \ln \text{ sur } ]0; +\infty[ \\
 &\iff n \ln 0,8 < \ln 0,01 \quad \text{propriété de la fonction } \ln \\
 &\iff n > \frac{\ln 0,01}{\ln 0,8} \quad \text{car } \ln 0,8 < 0
 \end{aligned}$$

Or  $\frac{\ln 0,01}{\ln 0,8} \approx 20,6$  donc c'est au bout de 21 minutes que la quantité de médicament dans le sang devient inférieure à 1 % de la quantité initiale.

On trouve à la calculatrice que  $u_{20} \approx 0,115 > 0,1$  et  $u_{21} \approx 0,092 < 0,1$ .

2. Une machine effectue à l'instant 0 une injection de 10 mL de médicament. On estime que 20 % du médicament est éliminé par minute. Lorsque la quantité de médicament tombe en-dessous de 5 mL, la machine réinjecte 4 mL de produit. Au bout de 15 minutes, on arrête la machine.

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $v_n$  la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang à la minute  $n$ . L'algorithme suivant donne la quantité restante de médicament minute par minute :

Variables :  $n$  est un entier naturel.  
 $v$  est un nombre réel.

Initialisation : Affecter à  $v$  la valeur 10.

Traitement : Pour  $n$  allant de 1 à 15  
     Affecter à  $v$  la valeur  $0,8 \times v$ .  
     Si  $v < 5$  alors affecter à  $v$  la valeur  $v + 4$   
     Afficher  $v$ .  
 Fin de boucle.

(a) Le tableau ci-dessous donne la quantité restante de médicament minute par minute :

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$v_n$	10	8	6,4	5,12	8,10	6,48	5,18	8,15	6,52	5,21	8,17	6,54	5,23	8,18	6,55	5,24

(b) Les 15 premières minutes, le patient a absorbé 10 mL au début, puis 4 mL les minutes 4, 7, 10 et 13 soit 16 mL ; ce qui fait un total de 26 mL.

(c) On programme la machine afin qu'elle injecte 2 mL de produit lorsque la quantité de médicament dans le sang est inférieure ou égale à 6 mL et qu'elle s'arrête au bout de 30 minutes.

L'algorithme suivant affiche la quantité de médicament restant dans le sang minute par minute :

Variables :  $n$  est un entier naturel.  
 $v$  est un nombre réel.

Initialisation : Affecter à  $v$  la valeur 10.

Traitement : Pour  $n$  allant de 1 à 30

Affecter à $v$ la valeur $0,8 \times v$ .
Si $v \leq 6$ alors affecter à $v$ la valeur $v + 2$
Afficher $v$ .

Fin de boucle.

3. On programme la machine de façon que :

- à l'instant 0, elle injecte 10 mL de médicament,
- toutes les minutes, elle injecte 1 mL de médicament.

On estime que 20 % du médicament présent dans le sang est éliminé par minute. Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $w_n$  la quantité de médicament, en mL, présente dans le sang du patient au bout de  $n$  minutes.

(a) Comme 20 % du médicament est éliminé chaque minute, il en reste 80 % donc on multiplie par 0,8. De plus, toutes les minutes, on rajoute 1 mL.

On peut donc dire que, pour tout  $n$ ,  $w_{n+1} = 0,8w_n + 1$ .

(b) Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $z_n = w_n - 5$ , donc  $w_n = z_n + 5$ .

$$z_{n+1} = w_{n+1} - 5 = 0,8w_n + 1 - 5 = 0,8(z_n + 5) - 4 = 0,8z_n + 4 - 4 = 0,8z_n$$

$z_0 = w_0 - 5$  ; or à l'instant 0, on injecte 10 mL donc  $w_0 = 10$ . On a donc  $z_0 = 5$ .

La suite  $(z_n)$  est donc géométrique de premier terme  $z_0 = 5$  et de raison  $q = 0,8$ .

(c) D'après les propriétés des suites géométriques, on peut dire que, pour tout  $n$  :  $z_n = z_0 \times q^n = 5 \times 0,8^n$ .

Or  $w_n = z_n + 5$  donc, pour tout  $n$ ,  $w_n = 5 \times 0,8^n + 5$ .

(d) La suite  $(z_n)$  est géométrique de raison 0,8 ; or  $-1 < 0,8 < 1$  donc la suite  $(w_n)$  est convergente vers 5. D'après les théorèmes sur les limites de suite, on peut en déduire que la suite  $(w_n)$  est convergente et a pour limite 5.

Cela veut dire que, si on poursuit ce traitement, la quantité de médicament présente dans le sang du patient va se rapprocher de 5 mL.

**EXERCICE 14** énoncé Nouvelle Calédonie 2014

**Candidats n'ayant pas suivi renseignement de spécialité**

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = 5 - \frac{4}{x+2}$ .

1.  $f'(x) = 0 - \frac{0(x+2) - 4 \times 1}{(x+2)^2} = \frac{4}{(x+2)^2} > 0$  sur  $[0; +\infty[$ .

Donc la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $[0; +\infty[$ .

2. On résout dans  $[0; +\infty[$  l'équation  $f(x) = x$  :

$$f(x) = x \iff 5 - \frac{4}{x+2} = x \iff \frac{5(x+2) - 4 - x(x+2)}{x+2} = 0 \iff \frac{5x+10-4-x^2-2x}{x+2} = 0$$

$$\iff \frac{-x^2+3x+6}{x+2} = 0 \iff -x^2+3x+6=0 \text{ et } x+2 \neq 0$$

On résout  $-x^2+3x+6=0$  ;  $\Delta = 9 - 4 \times 6 \times (-1) = 33 > 0$ .

Les solutions sont donc  $\frac{-3 - \sqrt{33}}{-2} = \frac{3 + \sqrt{33}}{2}$  et  $\frac{3 - \sqrt{33}}{2}$ .

Cette deuxième solution est négative donc l'unique solution de l'équation  $f(x) = x$  dans l'intervalle  $[0; +\infty[$  est  $\alpha = \frac{3 + \sqrt{33}}{2} \approx 4,37$ .

3. On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

Sur la figure de **annexe 1**, on place les points  $M_0$ ,  $M_1$  et  $M_2$  d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives  $u_0$ ,  $u_1$  et  $u_2$  ; voir page 64.

On peut conjecturer que la suite  $(u_n)$  est croissante et converge vers  $\alpha$ .

4. (a) Soit  $\mathcal{P}_n$  la propriété  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$ .

• Pour  $n = 0$ ,  $u_n = u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = u_1 = f(u_0) = 5 - \frac{4}{1+2} = \frac{11}{3}$  ; de plus  $\alpha \approx 4,37$ .

On a  $0 \leq 1 \leq \frac{11}{3} \leq \alpha$  ce qui veut dire que la propriété est vraie au rang 0.

• On suppose la propriété vraie au rang  $p \geq 0$ , autrement dit :  $0 \leq u_p \leq u_{p+1} \leq \alpha$ .

On sait d'après la question 1. que la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $[0; +\infty[$  ; donc :

$$0 \leq u_p \leq u_{p+1} \leq \alpha \implies f(0) \leq f(u_p) \leq f(u_{p+1}) \leq f(\alpha)$$

$$f(0) = 3 \geq 0, f(u_p) = u_{p+1} \text{ et } f(u_{p+1}) = u_{p+2}.$$

De plus,  $\alpha$  est solution de l'équation  $f(x) = x$  donc  $f(\alpha) = \alpha$ .

On a donc  $0 \leq u_{p+1} \leq u_{p+2} \leq \alpha$  ; on peut dire que la propriété est vraie au rang  $p+1$ .

- La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire ; donc la propriété est vraie pour tout entier naturel  $n$ .

On a donc démontré que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$ .

(b) Pour tout  $n$ ,  $u_n \leq u_{n+1}$  donc la suite  $(u_n)$  est croissante.

Pour tout  $n$ ,  $u_n \leq \alpha$  donc la suite  $(u_n)$  est majorée par  $\alpha$ .

Donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite  $(u_n)$  est convergente.

5. Pour tout entier naturel  $n$ , on définit la suite  $(S_n)$  par  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ .

(a)  $S_0 = u_0 = 1$  ;  $S_1 = u_0 + u_1 = 1 + \frac{11}{3} = \frac{14}{3} \approx 3,7$

$S_2 = u_0 + u_1 + u_2 = S_1 + u_2$  ;  $u_2 = f(u_1) = f\left(\frac{11}{3}\right) = \frac{73}{17}$  donc  $S_2 = \frac{14}{3} + \frac{73}{17} = \frac{457}{51} \approx 9,0$

(b) On complète l'algorithme donné en annexe 2 pour qu'il affiche la somme  $S_n$  pour la valeur de l'entier  $n$  demandée à l'utilisateur ; voir page 63.

(c) On sait que la suite  $(u_n)$  est croissante donc, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $u_n \geq u_0$ .

Or  $u_0 = 1$ , donc, pour tout  $n$ ,  $u_n \geq 1$  et donc  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n \geq n+1$ .

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n+1 = +\infty$  donc, d'après les théorèmes de comparaison sur les limites :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$$

Annexe 2

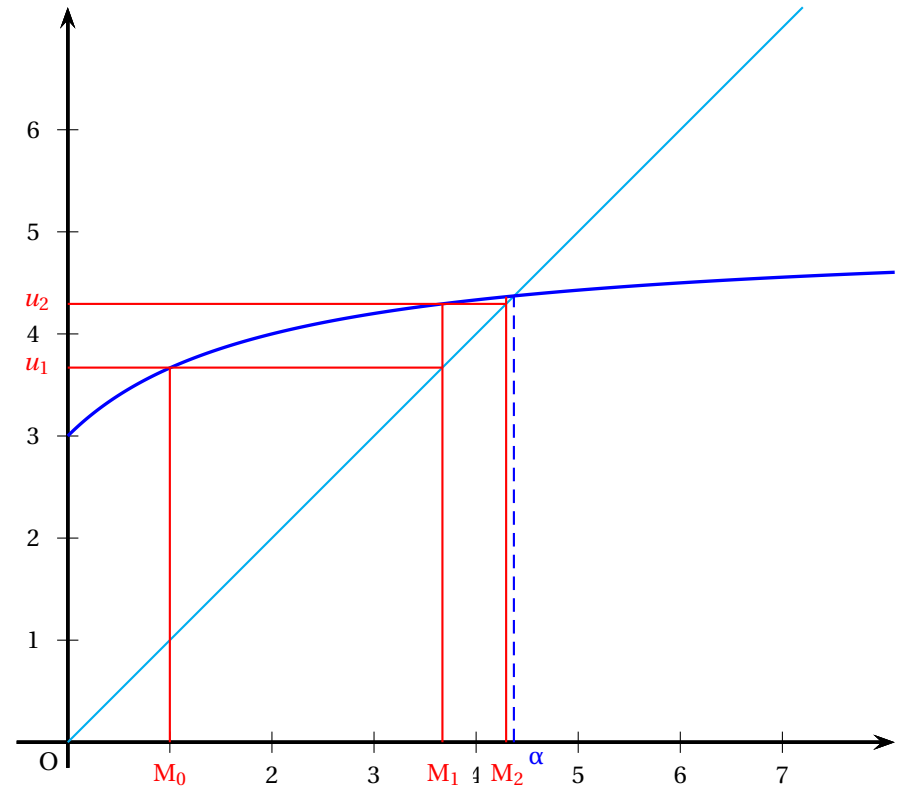
**Entrée :**  $n$  un entier naturel

**Variables :**  $u$  et  $s$  sont des variables réelles  
 $n$  et  $i$  sont des variables entières

**Initialisation :**  $u$  prend la valeur 1  
 $s$  prend la valeur  $u$   
 $i$  prend la valeur 0  
 Demander la valeur de  $n$

**Traitement :** Tant que  $i < n$   
     Affecter à  $i$  la valeur  $i + 1$   
     Affecter à  $u$  la valeur  $5 - \frac{4}{u+2}$   
     Affecter à  $s$  la valeur  $s + u$   
 Fin Tant que

**Sortie :** Afficher  $s$



**EXERCICE 15** énoncé Nouvelle Calédonie mars 2014

Commun à tous les candidats

Soit  $f$  la fonction dérivable, définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = x \ln(x)$ .

1. D'après le cours, on sait que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(x) = 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(x) = +\infty \text{ (par produit) donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

2. La fonction  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  comme produit de fonctions dérivables :

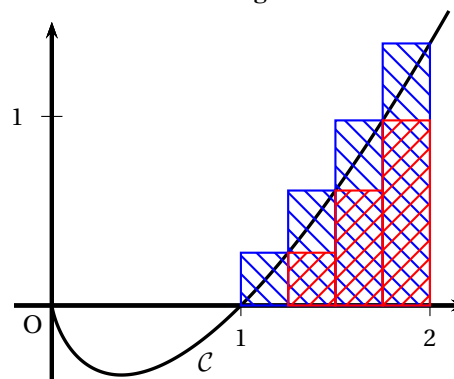
$$f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1.$$

3. On étudie le signe de  $f'(x)$  sur  $]0; +\infty[$  :  $\ln(x) + 1 > 0 \iff \ln(x) > -1 \iff x > e^{-1}$

Donc :

- La fonction  $f$  est strictement décroissante sur  $]0; e^{-1}]$  ;
- la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $[e^{-1}; +\infty[$ .

Figure



Algorithme

**Variables**

$k$  et  $n$  sont des entiers naturels  
 $U, V$  sont des nombres réels

**Initialisation**

$U$  prend la valeur 0  
 $V$  prend la valeur 0  
 $n$  prend la valeur 4

**Traitement**

Pour  $k$  allant de 0 à  $n - 1$

Affecter à  $U$  la valeur  $U + \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right)$   
 Affecter à  $V$  la valeur  $V + \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k+1}{n}\right)$

Fin pour

**Affichage**

Afficher  $U$   
 Afficher  $V$

1. (a) Sur la figure ci-dessus, le nombre  $U$  représente la somme des aires des rectangles inférieurs (en rouge) ; cette somme minore l'aire sous la courbe. Le nombre  $V$  représente la somme des aires des rectangles supérieurs (en bleu) ; cette somme majore l'aire sous la courbe.

(b) On fait tourner l'algorithme ci-dessus :

Variables	k	U	V	n
Initialisation		0	0	4
Traitement	0	0	0,069 8	4
	1	0,069 7	0,221 8	4
	2	0,221 7	0,466 7	4
	3	0,466 6	0,813 2	4
Affichage	On affiche la valeur de U : 0,466 6			
	On affiche la valeur de V : 0,813 2			

(c) On peut donc en déduire que  $0,4666 < \mathcal{A} < 0,8132$ .

2. On admettra que, pour tout  $n$  entier naturel non nul,  $U_n \leq \mathcal{A} \leq V_n$ .

(a) Sachant que  $U_n = \frac{1}{n} \left[ f(1) + f\left(1 + \frac{1}{n}\right) + f\left(1 + \frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(1 + \frac{n-1}{n}\right) \right]$  et que

$$V_n = \frac{1}{n} \left[ f\left(1 + \frac{1}{n}\right) + f\left(1 + \frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(1 + \frac{n-1}{n}\right) + f(2) \right],$$

on peut dire que  $V_n - U_n = \frac{1}{n} (f(2) - f(1)) = \frac{2\ln(2) - 0}{n} = \frac{2\ln(2)}{n}$ .

$$V_n - U_n < 0,1 \iff \frac{2\ln(2)}{n} < 0,1 \iff 2\ln(2) < 0,1n \iff \frac{2\ln(2)}{0,1} < n$$

Or  $\frac{2\ln(2)}{0,1} \approx 13,86$  donc le plus petit entier  $n$  tel que  $V_n - U_n$  soit inférieur à 0,1 est 14.

Vérification :  $V_{13} - U_{13} \approx 0,107 > 0,1$  et  $V_{14} - U_{14} \approx 0,099 < 0,1$ .

(b) Pour obtenir un encadrement de  $\mathcal{A}$  d'amplitude inférieure à 0,1 dans l'algorithme, il suffit d'entrer 14 comme valeur de  $n$  ; autrement dit, au lieu de «  $n$  prend la valeur 4 », on entrera «  $n$  prend la valeur 14 ».

Soit  $F$  la fonction dérivable, définie sur  $]0; +\infty[$  par  $F(x) = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4}$ .

$$1. F'(x) = \frac{2x}{2} \times \ln(x) + \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x} - \frac{2x}{4} = x \ln(x) + \frac{x}{2} - \frac{x}{2} = x \ln(x) = f(x)$$

Donc  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .

2. La fonction  $f$  est croissante sur  $[1;2]$  et  $f(1) = 0$  donc la fonction  $f$  est positive sur  $[1;2]$  ; on peut donc dire que  $\mathcal{A} = \int_1^2 f(t) dt$ .

$$\mathcal{A} = \int_1^2 f(t) dt = F(2) - F(1) = (2\ln(2) - 1) - \left(-\frac{1}{4}\right) = 2\ln(2) - \frac{3}{4}$$

**EXERCICE 16** énoncé Polynésie 2014

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite  $(u_n)$  définie par

$$u_0 = 0 \text{ et, pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = u_n + 2n + 2.$$

1.  $u_1 = u_0 + 2 \times 0 + 2 = 2$  et  $u_2 = u_1 + 2 \times 1 + 2 = 6$ .

2. Le second affiche en sortie la valeur de  $u_n$ , la valeur de l'entier naturel  $n$  étant entrée par l'utilisateur.

3. Étude de la suite  $(u_n)$  :

(a) La suite  $(u_n)$  semble être croissante.

Démonstration :

$$u_{n+1} - u_n = u_n + 2n + 2 - u_n = 2n + 2 > 0 \text{ pour tout } n \text{ naturel}$$

(b) La forme parabolique du nuage de points amène à conjecturer l'existence de trois réels  $a, b$  et  $c$  tels que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = an^2 + bn + c$ .

$$\begin{cases} u_0 = a \times 0^2 + b \times 0 + c = 0 \\ u_1 = a \times 1^2 + b \times 1 + c = 2 \\ u_2 = a \times 2^2 + b \times 2 + c = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b = 2 \\ 4a + 2b = 6 \\ c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b = 2 \\ 2a + b = 3 \\ c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 0 \end{cases}$$

4. On définit, pour tout entier naturel  $n$ , la suite  $(v_n)$  par :  $v_n = u_{n+1} - u_n = 2n + 2$ .

(a) C'est une suite arithmétique de raison  $r = 2$  et de premier terme  $v_0 = 2$ .

(b) On définit, pour tout entier naturel  $n$ ,  $S_n = \sum_{k=0}^n v_k = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ .

$$S_n = \sum_{k=0}^n v_k = v_0 + v_1 + \dots + v_n = (n+1)v_0 + \frac{n(n+1)}{2} \times r = 2(n+1) + n(n+1) = (n+1)(n+2)$$

(c) Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $S_n = u_{n+1} - u_0$ , puis exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .

$$S_n = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \dots + (u_n - u_{n-1}) + (u_{n+1} - u_n) = u_{n+1} - u_0$$

$$S_{n-1} = u_n - u_0 \iff u_n = S_{n-1} + u_0 = n(n+1) + 0 = n(n+1)$$

**EXERCICE 17** énoncé Antilles 2015

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

**Partie A**

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	$k$ et $p$ sont des entiers naturels $u$ est un réel
Entrée :	Demander la valeur de $p$
Traitement :	Affecter à $u$ la valeur 5 Pour $k$ variant de 1 à $p$ Affecter à $u$ la valeur $0,5u + 0,5(k - 1) - 1,5$ Fin de pour
Sortie :	Afficher $u$

valeur de $k$	1	2	
valeur de $u$	5	1	-0,5

On obtient en sortie : -0,5.

**Partie B**

$$u_{n+1} = 0,5u_n + 0,5n - 1,5.$$

1.

Algorithme modifié :

Variables :	$k$ et $p$ sont des entiers naturels $u$ est un réel
Entrée :	Demander la valeur de $p$
Traitement :	Affecter à $u$ la valeur 5 Pour $k$ variant de 1 à $p$ Affecter à $u$ la valeur $0,5u + 0,5(k - 1) - 1,5$ Afficher $u$
Sortie :	Fin de pour

2. Puisque  $u_4 > u_3$  la suite  $(u_n)$  n'est pas décroissante, du moins pas avant le rang 4.

3. *Initialisation* On vient de voir que  $u_4 > u_3$  : la relation est vraie pour  $n = 3$ .

*Hérédité* On suppose qu'il existe un naturel  $p$  tel que  $u_{p+1} > u_p$ .

D'où  $0,5u_{p+1} > 0,5u_p$  ; D'autre part :  $p + 1 > p \Rightarrow 0,5(p + 1) > 0,5p$  d'où par somme des ces deux dernières inégalités :

$0,5u_{p+1} + 0,5(p + 1) > 0,5u_p + 0,5p$  et en ajoutant  $-1,5$  à chaque membre :

$0,5u_{p+1} + 0,5(p + 1) - 1,5 > 0,5u_p + 0,5p - 1,5$  soit  $u_{p+2} > u_{p+1}$  : la relation est vraie au rang  $p + 1$ .

On a donc démontré que pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 3,  $u_{n+1} > u_n$  ce qui montre que la suite  $(u_n)$  est croissante à partir du rang 4.

4. Pour tout naturel  $n$ , on a :

$$v_{n+1} = 0,1u_{n+1} - 0,1(n+1) + 0,5 = 0,1u_{n+1} - 0,1n + 0,4 = 0,1(0,5u_n + 0,5n - 1,5) - 0,1n + 0,4 = 0,05u_n + 0,05n - 0,15 - 0,1n + 0,4 = 0,05u_n - 0,05n + 0,25 = 0,5(0,1u_n - 0,1n + 0,5) = 0,5v_n$$

la suite  $(v_n)$  rdy donc géométrique de raison 0,5.

Le premier terme est :

$$v_0 = 0,1 \times 5 - 0,1 \times 0 + 0,5 = 1.$$

On a donc pour tout naturel  $n$ ,  $v_n = 1 \times 0,5^n = 0,5^n = \frac{1}{2^n}$ .

5. On a  $v_n = 0,1u_n - 0,1n + 0,5 \iff 0,5^n = 0,1u_n - 0,1n + 0,5 \iff 10 \times 0,5^n = u_n - n + 5 \iff u_n = 10 \times 0,5^n + n - 5$ .

6. Comme  $-1 < 0,5 < 1$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^n = 0$  et comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ , on a donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ . La suite  $(u_n)$  ne converge pas.

**EXERCICE 18** énoncé Centres Étrangers 2015

Commun à tous les candidats

Soit  $a$  un nombre réel fixé non nul. Soit  $(u_n)$  la suite définie par : 
$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = e^{2u_n} - e^{u_n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On remarquera que cette égalité peut aussi s'écrire :  $u_{n+1} = e^{u_n} (e^{u_n} - 1)$ .

1. Soit  $g$  la fonction définie pour tout réel  $x$  par :  $g(x) = e^{2x} - e^x - x$

(a) La fonction  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $g'(x) = 2e^{2x} - e^x - 1$ .

Or  $(e^x - 1)(2e^x + 1) = 2e^{2x} - 2e^x + e^x - 1 = 2e^{2x} - e^x - 1$

Donc  $g'(x) = (e^x - 1)(2e^x + 1)$ .

(b) Les variations de la fonction  $g$  dépendent du signe de  $g'$  sur  $\mathbb{R}$ .

Pour tout réel  $x$ ,  $e^x > 0$  donc  $2e^x + 1 > 0$  ; donc  $g'(x)$  est du signe de  $e^x - 1$  :

$e^x - 1 > 0 \iff e^x > 1 \iff x > 0$

$g(0) = e^0 - e^0 - 0 = 0$

La fonction  $g$  est strictement décroissante sur  $]-\infty; 0]$ , strictement croissante sur  $[0; +\infty[$  et admet un minimum égal à 0 pour  $x = 0$ .

(c)  $u_{n+1} - u_n = e^{2u_n} - e^{u_n} - u_n = g(u_n)$ .

Or la fonction  $g$  a pour minimum 0 sur  $\mathbb{R}$  donc  $g(u_n) \geq 0$  pour tout  $n$  et donc  $u_{n+1} - u_n \geq 0$  pour tout  $n$ . La suite  $(u_n)$  est donc croissante.

2. Dans cette question, on suppose que  $a \leq 0$ .

(a) Soit  $\mathcal{P}_n$  la propriété  $u_n \leq 0$ .

- $u_0 = a$  ; or  $a \leq 0$  donc  $u_0 \leq 0$ . La propriété est vraie au rang 0.

- On suppose la propriété vraie au rang  $p$  (où  $p \geq 0$ ), c'est-à-dire  $u_p \leq 0$  ; c'est l'hypothèse de récurrence.

On sait que  $u_{p+1} = e^{u_p}(e^{u_p} - 1)$

D'après l'hypothèse de récurrence,  $u_p \leq 0$  donc  $e^{u_p} \leq 1$  donc  $e^{u_p} - 1 \leq 0$ .

Comme  $e^{u_p} > 0$  on déduit que  $u_{p+1} \leq 0$  et la propriété est vraie au rang  $p + 1$ .

- La propriété  $u_n \leq 0$  est vraie en 0 ; elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout  $n$ .

(b) La suite  $(u_n)$  est croissante et majorée par 0, donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite  $(u_n)$  est convergente.

(c) La suite est croissante donc, pour tout  $n$ ,  $u_n \geq u_0$ .

Si  $a = 0$ ,  $u_0 = 0$  ; comme, pour tout  $n$ ,  $u_n \geq u_0$  donc  $u_n \geq 0$ .

Or on a vu que, pour tout  $n$ ,  $u_n \leq 0$ .

Donc pour tout  $n$ ,  $u_n = 0$ .

On peut déduire que la suite  $(u_n)$  est constante et égale à 0 donc sa limite est 0.

3. Dans cette question, on suppose que  $a > 0$ .

La suite  $(u_n)$  étant croissante, la question 1. permet d'affirmer que, pour tout  $n$ ,  $u_n \geq a$  ; comme  $a > 0$ , on peut en déduire que, pour tout  $n$ ,  $u_n > 0$ .

(a) On a vu que, pour tout  $n$ ,  $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$ .

Or  $0 < a \leq u_n$  pour tout  $n$  ; on sait que la fonction  $g$  est strictement croissante sur  $[0; +\infty[$  donc  $g(0) < g(a) \leq g(u_n)$  et donc  $g(u_n) \geq g(a)$  pour tout  $n$ .

On a donc démontré que  $u_{n+1} - u_n \geq g(a)$ .

(b) Soit  $\mathcal{P}_n$  la propriété :  $u_n \geq a + n \times g(a)$ .

- Pour  $n = 0$ ,  $u_0 = a$  et  $a + n \times g(a) = a + 0 = a$  donc la propriété est vraie au rang 0.

- On suppose la propriété vraie au rang  $p$  (où  $p \geq 0$ ), c'est-à-dire  $u_p \geq a + p \times g(a)$  ; c'est l'hypothèse de récurrence.

On sait que  $u_{p+1} - u_p \geq g(a)$  ; or  $u_p \geq a + p \times g(a)$  (HR). Donc  $u_{p+1} \geq a + p \times g(a) + g(a)$  ce qui équivaut à  $u_{p+1} \geq a + (p + 1) \times g(a)$ .

La propriété est donc vraie au rang  $p + 1$ .

- La propriété  $u_n \geq a + n \times g(a)$  est vraie en 0 ; elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout  $n$ .

(c)  $a > 0$  donc  $g(a) > 0$  car 0 est le minimum de la fonction  $g$ , atteint en 0.

Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n \times g(a)) = +\infty$  et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a + n \times g(a)) = +\infty$

Comme  $u_n \geq a + n \times g(a)$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a + n \times g(a)) = +\infty$ , on peut déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

4. Dans cette question, on prend  $a = 0,02$ .

L'algorithme suivant a pour but de déterminer le plus petit entier  $n$  tel que  $u_n > M$ , où  $M$  désigne un réel positif.

(a) On complète l'algorithme :

<b>Variables</b>	$n$ est un entier, $u$ et $M$ sont deux réels
<b>Initialisation</b>	$u$ prend la valeur 0,02 $n$ prend la valeur 0 Saisir la valeur de $M$
<b>Traitement</b>	Tant que $u \leq M$ $u$ prend la valeur $e^{2u} - e^u$ $n$ prend la valeur $n + 1$ Fin tant que
<b>Sortie</b>	Afficher $n$

(b) On suppose  $M = 60$ . On trouve à la calculatrice  $u_{35} \approx 2,13$  et  $u_{36} \approx 62,35$  ; donc la valeur affichée par l'algorithme pour  $M = 60$  est 36.

**EXERCICE 19** énoncé Liban 2015

1. Sur  $[0 ; 1]$ ,  $1 \leq 1+x \leq 2$ , donc une primitive sur cet intervalle de

$x \mapsto \frac{1}{1+x}$  est  $x \mapsto \ln(1+x)$ . D'où :

$$u_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2.$$

2. (a) Par linéarité de l'intégrale :

$$u_{n+1} + u_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx + \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^{n+1} + x^n}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^n(x+1)}{1+x} dx = \int_0^1 x^n dx = \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

(b) La relation précédente donne pour  $n=0$ ,

$$u_1 + u_0 = 1 \iff u_1 = 1 - u_0 = 1 - \ln 2.$$

3. (a) • Il faut initialiser la suite à  $u_0 = \ln 2$ .

• La relation  $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}$  s'écrit au rang précédent, soit pour  $n \geq 1$ ,  $u_n + u_{n-1} = \frac{1}{n}$ , soit  $u_n = -u_{n-1} + \frac{1}{n}$ .

Pour passer d'un terme à l'autre il faut donc prendre l'opposé du terme précédent et ajouter  $\frac{1}{n}$ .

D'où l'algorithme :

Variables :	$i$ et $n$ sont des entiers naturels ( $n \geq 1$ )
	$u$ est un réel
Entrée :	Saisir $n$
Initialisation :	Affecter à $u$ la valeur $\ln 2$
Traitement :	Pour $i$ variant de 1 à $n$
	Affecter à $u$ la valeur $-u + \frac{1}{i}$
	FindePour
Sortie :	Afficher $u$

(b) Conjecture : il semble que la suite  $(u_n)$  soit décroissante vers zéro.

4. (a) Pour tout naturel  $n$ ,  $u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx =$

$$\int_0^1 \frac{x^{n+1} - x^n}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x} dx.$$

Or on a vu que sur  $[0 ; 1]$ ,  $1+x > 0$ ,  $x^n \geq 0$  et  $0 \leq x \leq 1 \iff$

$$-1 \leq x-1 \leq 0, \text{ donc finalement } \frac{x^n(x-1)}{1+x} \leq 0.$$

Conclusion : l'intégrale de cette fonction négative sur  $[0 ; 1]$  est négative.

Or  $u_{n+1} - u_n < 0$  quel que soit  $n$  montre que la suite  $(u_n)$  est décroissante.

(b)  $u_n$  intégrale d'une fonction positive sur  $[0 ; 1]$  est quel que soit le naturel  $n$ , un nombre positif ou nul.

La suite  $(u_n)$  décroissante et étant minorée par zéro converge vers une limite  $\ell$ , avec  $\ell \geq 0$ .

5. Pour tout naturel  $n$ ,  $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1} \Rightarrow 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$ , puisque

$$u_{n+1} \geq 0.$$

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ .

Conclusion  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell = 0$ .

**EXERCICE 20** énoncé **Métropole septembre 2015**

Soit  $f$  la fonction définie et dérivable sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  telle que :  $f(x) = \frac{x}{e^x - x}$

Soit la suite  $(I_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $I_n = \int_0^n f(x) dx$ .

1.  $I_n = \int_0^n f(x) dx$  donc, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $I_{n+1} - I_n = \int_0^{n+1} f(x) dx - \int_0^n f(x) dx = \int_n^{n+1} f(x) dx$

On admet dans le texte que la fonction  $f$  est positive sur  $[0 ; +\infty[$  donc sur  $[n ; n+1]$  ; on peut en déduire que  $\int_n^{n+1} f(x) dx > 0$  et donc que  $I_{n+1} - I_n > 0$  pour tout  $n$ .

La suite  $(I_n)$  est donc croissante.

2. On admet que pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ ,  $e^x - x \geq \frac{e^x}{2}$ .

(a) Sur  $[0 ; +\infty[$ , on sait que  $e^x - x \geq \frac{e^x}{2}$  ; de plus, pour tout  $x$ ,  $e^x - x > 0$ . donc  $\frac{1}{e^x - x} \leq \frac{2}{e^x}$ .

On multiplie cette inégalité par  $x \geq 0$  donc :  $\frac{x}{e^x - x} \leq \frac{2x}{e^x}$

D'après la positivité de l'intégration :  $\int_0^n \frac{x}{e^x - x} dx \leq \int_0^n \frac{2x}{e^x} dx$

ce qui équivaut à  $I_n \leq \int_0^n 2xe^{-x} dx$

(b) Soit  $H$  la fonction définie et dérivable sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  telle que :  $H(x) = (-x-1)e^{-x}$

La fonction  $H$  est dérivable sur  $[0 ; +\infty[$  comme produit de fonctions dérivables et

$$H'(x) = -1 \times e^{-x} + (-x-1)(-1)e^{-x} = -e^{-x} + xe^{-x} + e^{-x} = xe^{-x}$$

(c) On déduit de la question précédente que la fonction  $2H$  est une primitive de la fonction  $x \mapsto 2xe^{-x}$ .

$$\text{Donc } \int_0^n 2xe^{-x} dx = [2(-x-1)e^{-x}]_0^n = 2(-n-1)e^{-n} - [2(-1)e^0] = 2 - 2(n+1)e^{-n}$$

Pour tout  $x$ ,  $e^x > 0$  donc  $2(n+1)e^{-n} > 0$  donc  $2 - 2(n+1)e^{-n} \leq 2$

$$\left. \begin{array}{l} I_n \leq \int_0^n 2xe^{-x} dx \\ \int_0^n 2xe^{-x} dx \leq 2 \end{array} \right\} \Rightarrow I_n \leq 2$$

3. La suite  $(I_n)$  est croissante et majorée par 2 donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite  $(I_n)$  est convergente.

1. On fait fonctionner l'algorithme pour  $K = 4$  donc pour  $h = 0,25$  :

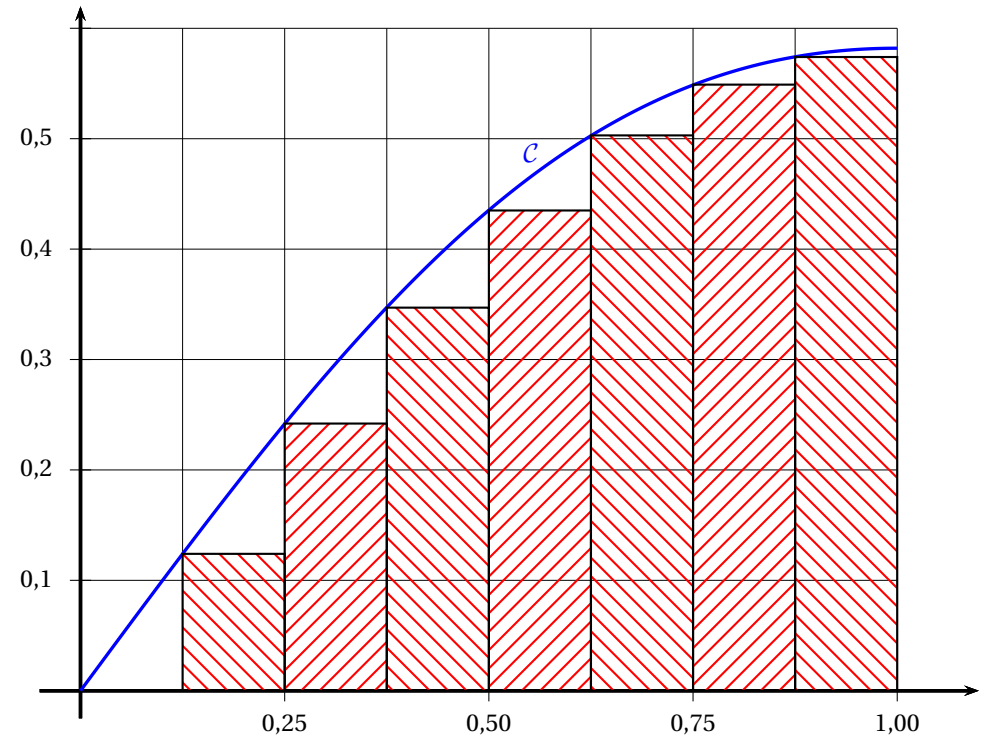
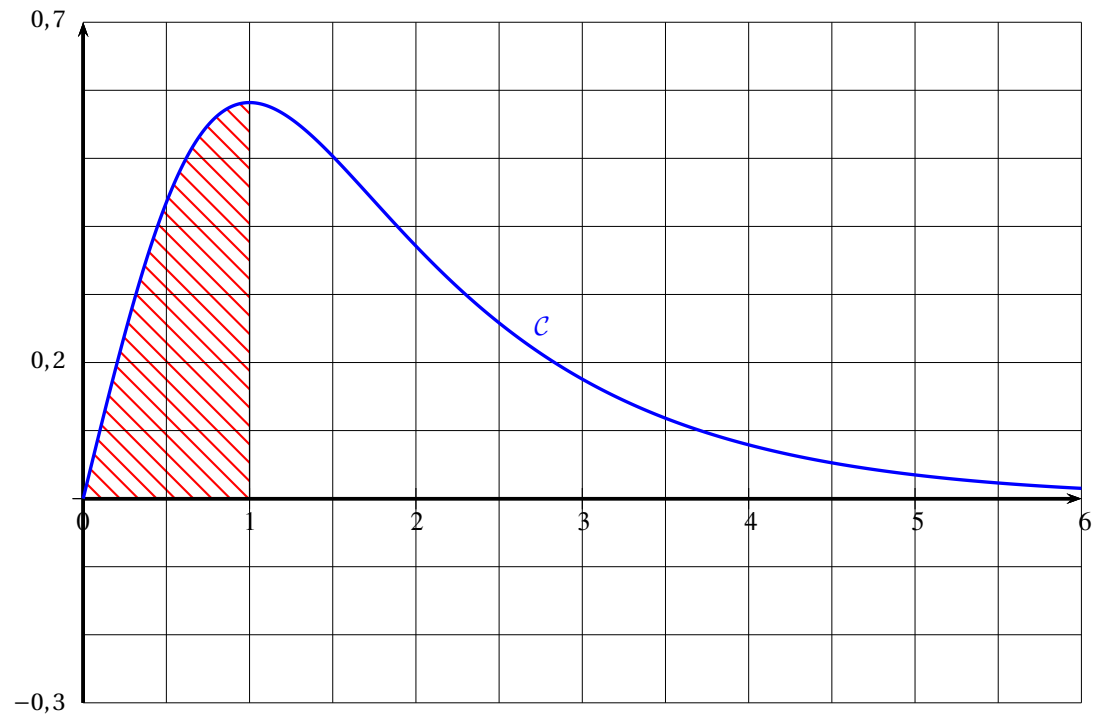
$i$	A	$x$
1	0	0,25
2	0,060	0,5
3	0,169	0,75
4	0,306	1

2. Pour  $K = 8$ , l'algorithme donne la somme des aires des rectangles hachurés sur le graphique du bas de la page ??.

3. Quand  $K$  devient grand, l'algorithme donne une valeur approchée par défaut de l'aire du domaine compris entre la courbe  $\mathcal{C}$ , l'axe des abscisses, et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = 1$  (voir page ??, le graphique du haut).

**À rendre avec la copie**

Courbe  $\mathcal{C}$ , représentative de la fonction  $f$  sur  $[0 ; 6]$



Courbe  $C$ , représentative de la fonction  $f$  sur  $[0; 1]$

**EXERCICE 21** énoncé Polynésie 2015

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

**Partie A -- Conjectures à l'aide d'un algorithme**

1.

Variables :	$n, k$ entiers $S, v$ réels		
Initialisation :	Saisir la valeur de $n$ $v$ prend la valeur $\ln(2)$ $S$ prend la valeur $v$		
Traitement :	Pour $k$ variant de 2 à $n$ faire <table style="margin-left: 20px; border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>v</math> prend la valeur <math>\ln(2 - e^v)</math></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>S</math> prend la valeur <math>S + v</math></td> </tr> </table> Fin Pour	$v$ prend la valeur $\ln(2 - e^v)$	$S$ prend la valeur $S + v$
$v$ prend la valeur $\ln(2 - e^v)$			
$S$ prend la valeur $S + v$			
Sortie :	Afficher $S$		

2. D'après les valeurs affichées il semble que la suite  $(S_n)$  soit croissante.

**Partie B -- Étude d'une suite auxiliaire**

1. On a  $u_1 = e^{v_1} = e^{\ln(2)} = 2$ .

Pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = e^{v_{n+1}} = e^{\ln(2 - e^{-v_n})} = (2 - e^{-v_n}) =$

$$2 - \frac{1}{e^{v_n}} = 2 - \frac{1}{u_n} = u_{n+1}.$$

2. D'après le résultat précédent :

$$u_2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2};$$

$$u_3 = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3};$$

$$u_4 = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}.$$

3. Démonstration par récurrence :

*Initialisation* : la relation est vraie pour  $n = 4$  ;

*Hérédité* : Supposons qu'il existe un naturel  $p > 4$  tel que  $u_p = \frac{p+1}{p}$ .

On a  $u_{p+1} = 2 - \frac{1}{u_p} = 2 - \frac{p}{p+1} = \frac{2p+2-p}{p+1} = \frac{p+2}{p+1}$  : la relation est donc vraie au rang  $p+1$ .

On a donc démontré par récurrence que pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $u_n = \frac{n+1}{n}$ .

**Partie C -- Étude de  $(S_n)$**

1. Pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $u_n = e^{v_n} \Rightarrow v_n = \ln u_n$ .

De la question précédente on peut écrire :

$$v_n = \ln \frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n.$$

2.  $S_3 = v_1 + v_2 + v_3 = \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \ln 4 - \ln 3 = \ln 4 - \ln 1 = \ln 4$ .

3.  $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n = \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \ln 4 - \ln 3 + \dots + \ln n - \ln(n-1) + \ln(n+1) - \ln n = \ln(n+1)$ .

On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$ . La suite  $(S_n)$  est divergente.

**EXERCICE 22** énoncé Antilles 2013

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. On a  $a_0 = 1$  et  $b_0 = 1$ .

2.  $z_1 = \frac{z_0 + |z_0|}{3} = \frac{1+i+\sqrt{2}}{3} = \frac{1+\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{3}i$ . On a alors  $a_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{3}$  et  $b_1 = \frac{1}{3}$ .

3. (a) Pour  $N = 2$ , le tableau de l'état des variables dans l'algorithme est :

K	A	B
1	0,804 7	0,333 3
2	0,558 6	0,111 1

(b) Plus généralement, pour une valeur de  $N$  saisie par l'utilisateur, l'algorithme affichera la valeur de  $a_N$ .

**Partie B**

1. On a, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $z_{n+1} = a_{n+1} + ib_{n+1}$  et  $z_{n+1} = \frac{a_n + ib_n + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{3}$ , donc :

$$a_{n+1} = \frac{a_n + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{3} \text{ et } b_{n+1} = \frac{b_n}{3}.$$

2. La suite  $(b_n)$  est géométrique de premier terme  $b_0 = 1$  et de raison  $\frac{1}{3}$ , par conséquent, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $b_n = (\frac{1}{3})^n$ . Comme  $-1 < \frac{1}{3} < 1$ , on en déduit que  $(b_n)$  converge vers 0.

3. (a) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|z_{n+1}| = \left| \frac{z_n + |z_n|}{3} \right| = \frac{1}{3} |z_n + |z_n|| \leq \frac{1}{3} (|z_n| + |z_n|)$ , c'est-à-dire :  $|z_{n+1}| \leq \frac{2|z_n|}{3}$ .

(b) Montrons par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leq (\frac{2}{3})^n \sqrt{2}$ .

□ On a  $u_0 = |z_0| = \sqrt{2}$  et  $(\frac{2}{3})^0 \sqrt{2} = \sqrt{2}$ , la propriété est donc vraie pour  $n = 0$ .

□ Supposons que, pour un certain entier naturel  $n$ ,  $u_n \leq (\frac{2}{3})^n \sqrt{2}$ , alors :

$$u_{n+1} = |z_{n+1}| \leq \frac{2}{3} u_n \leq \frac{2}{3} (\frac{2}{3})^n \sqrt{2} = (\frac{2}{3})^{n+1} \sqrt{2},$$

la propriété est donc héréditaire.

□ En conclusion, la propriété est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

On a de plus, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = |z_n| \geq 0$ , donc :  $0 \leq u_n \leq (\frac{2}{3})^n \sqrt{2}$ . Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{2}{3})^n \sqrt{2} = 0$ , le théorème « des gendarmes » permet de conclure que la suite  $(u_n)$  converge vers 0.

(c) On a, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$u_n = |z_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \geq \sqrt{a_n^2} = |a_n|.$$

Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq |a_n| \leq u_n$ . Comme  $(u_n)$  converge vers 0, le théorème « des gendarmes » permet à nouveau de conclure que  $(|a_n|)$  converge vers 0, donc que  $(a_n)$  converge vers 0.

**EXERCICE 23** énoncé Liban 2014

**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

On considère la suite de nombres complexes  $(z_n)$  définie par  $z_0 = \sqrt{3} - i$  et pour tout entier naturel  $n$  :

$$z_{n+1} = (1 + i)z_n$$

**Partie A**

Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $u_n = |z_n|$ .

1.  $u_0 = |z_0| = |\sqrt{3} - i| = 2$ .
2.  $u_{n+1} = |z_{n+1}| = |(1 + i)z_n| = |1 + i| \times |z_n| = \sqrt{2}|z_n| = \sqrt{2}u_n$
3. D'après le cours, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $u_n = 2(\sqrt{2})^n$  ;  $(u_n)$  est la suite géométrique de raison  $\sqrt{2}$  et de premier terme  $u_0 = 2$ .
4.  $(u_n)$  est une suite géométrique de raison  $\sqrt{2} > 1$  et de premier terme strictement positif, elle diverge donc vers  $+\infty$ .

5.

<b>Variables</b>	: $u$ est un réel $p$ est un réel $n$ est un entier
<b>Initialisation</b>	: Affecter à $n$ la valeur 0 Affecter à $u$ la valeur 2
<b>Entrée</b>	: Demander la valeur de $p$
<b>Traitement</b>	: Tant que $u \leq p$ Faire Affecter à $n$ la valeur $n + 1$ Affecter à $u$ la valeur $\sqrt{2} \times u$ Fin du Tant Que
<b>Sortie</b>	: Afficher $n$

**Partie B**

1.  $z_1 = (1 + i) \times (\sqrt{3} - i) = 1 + \sqrt{3} + i(\sqrt{3} - 1)$ .

2.  $z_0 = 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = 2e^{-i\pi/6}$

$1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ .

$z_1 = 2e^{-i\pi/6} \times \sqrt{2}e^{i\pi/4} = 2\sqrt{2}e^{i\pi/12}$ .

3. Des deux questions précédentes, on obtient que

$$1 + \sqrt{3} + i(\sqrt{3} - 1) = 2\sqrt{2}e^{i\pi/12} = 2\sqrt{2} \left( \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \right)$$

D'où

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

**EXERCICE 24** énoncé **Pondichéry 2014**

**Candidats n'ayant pas suivi la spécialité**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $A_n$  le point d'affixe  $z_n$  défini par :  $z_0 = 1$  et  $z_{n+1} =$

$$\left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right)z_n$$

On définit la suite  $(r_n)$  par  $r_n = |z_n|$  pour tout entier naturel  $n$ .

1.  $\left|\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right| = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{3}{16}} = \sqrt{\frac{12}{16}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}i\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{3}{4} \times \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{2}{\sqrt{3}}i\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

Or  $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  et  $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ .

Donc le nombre complexe  $\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$  a pour module  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  et pour argument  $\frac{\pi}{6}$  donc sa forme exponentielle est  $\frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$ .

2. (a)  $r_{n+1} = |z_{n+1}| = \left|\left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right)z_n\right| = \left|\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right| \times |z_n| = \frac{\sqrt{3}}{2}r_n$

Donc la suite  $(r_n)$  est géométrique de raison  $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$  et de premier terme  $r_0 = |z_0| = 1$ .

(b) La suite  $(r_n)$  est géométrique donc, pour tout  $n$ ,  $r_n = r_0 \times q^n$ , donc  $r_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$ .

(c)  $OA_n = |z_n| = r_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$

$(r_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; or  $-1 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$  donc la suite  $(r_n)$  converge vers

0. La longueur  $OA_n$  tend donc vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

3. (a) On fait tourner l'algorithme donné dans le texte en prenant pour P la valeur 0,5 :

	$n$	R	P	$R > P$
Initialisations	0	1	0,5	Vrai
Traitement	1	0,866	0,5	Vrai
	2	0,75	0,5	Vrai
	3	0,6495	0,5	Vrai
	4	0,5625	0,5	Vrai
	5	0,487	0,5	Faux
Sortie	Afficher 5			

La valeur affichée par l'algorithme pour  $P = 0,5$  est 5.

(b) Cet algorithme s'arrête dès que  $R \leq P$  et affiche alors  $n$ , c'est-à-dire qu'il affiche la plus petite valeur de  $n$  pour laquelle  $R$  donc  $r_n = OA_n$  est inférieur ou égal à  $P$ .

On peut donc dire que  $OA_{32} > 0,01$  et que  $OA_{33} \leq 0,01$ .

Vérification à la calculatrice :  $r_{32} \approx 0,01002$  et  $r_{33} \approx 0,00868$ .

4. (a) On considère le triangle  $OA_nA_{n+1}$ .

$OA_n = r_n$  donc  $(OA_n)^2 = r_n^2$

$OA_{n+1} = r_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2}r_n$  donc  $(OA_{n+1})^2 = \frac{3}{4}r_n^2$

$$A_nA_{n+1} = |z_{n+1} - z_n| = \left|\left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right)z_n - z_n\right| = \left|\left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i - 1\right)z_n\right| = \left|-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right| \times |z_n|$$

$$= \sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} \times r_n = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{3}{16}}r_n = \sqrt{\frac{4}{16}}r_n = \frac{1}{2}r_n$$

donc  $(A_nA_{n+1})^2 = \frac{1}{4}r_n^2$

$(A_nA_{n+1})^2 + (OA_{n+1})^2 = \frac{1}{4}r_n^2 + \frac{3}{4}r_n^2 = r_n^2 = (OA_n)^2$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle  $OA_nA_{n+1}$  est rectangle en  $A_{n+1}$ .

(b) On admet que  $z_n = r_n e^{i \frac{n\pi}{6}}$ .

Le point  $A_n$ , d'affixe  $z_n$ , appartient à l'axe des ordonnées si et seulement si son argument est  $\frac{\pi}{2}$  ou  $\frac{3\pi}{2}$  modulo  $2\pi$ , c'est-à-dire  $\frac{\pi}{2}$  modulo  $\pi$ , donc il peut s'écrire  $\frac{\pi}{2} + k\pi$  où  $k \in \mathbb{Z}$ .

Le nombre  $z_n$  a pour argument  $\frac{n\pi}{6}$  ;  $\frac{n\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi \iff n = 3 + 6k$ .

Mais  $n$  est un entier naturel donc  $k$  doit être strictement positif donc appartenir à  $\mathbb{N}$ .

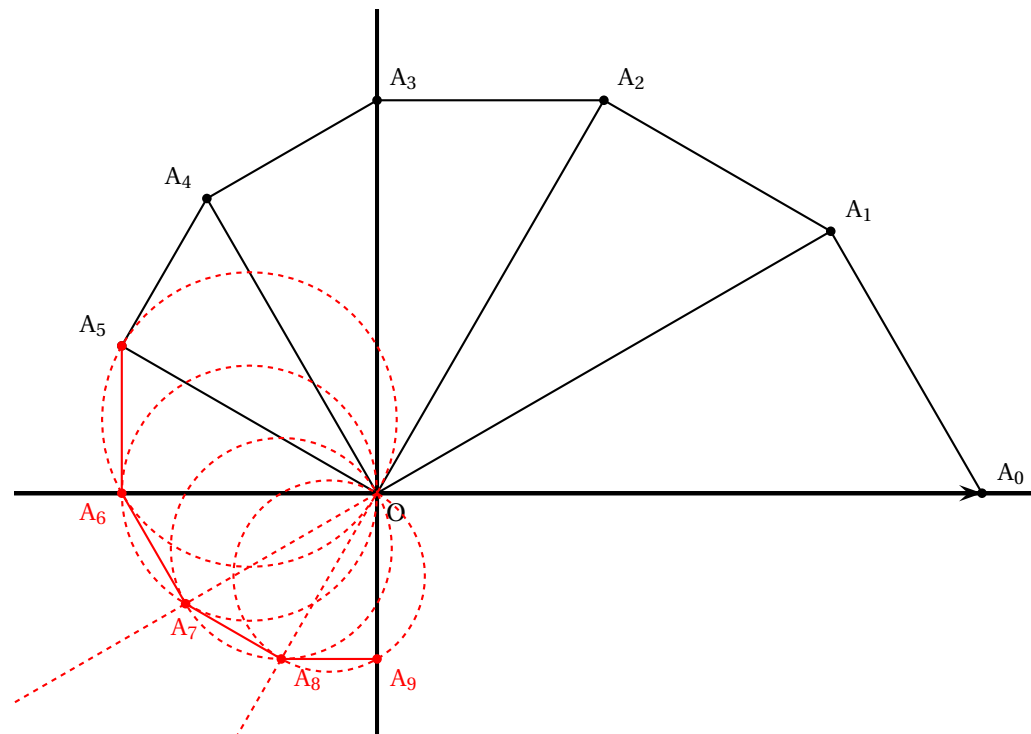
Donc si  $n$  s'écrit  $3 + 6k$  avec  $k \in \mathbb{N}$ , alors le point  $A_n$  appartient à l'axe des ordonnées.

(c) Le point  $A_6$  a pour affixe  $z_6$  qui a pour argument  $\frac{6\pi}{6} = \pi$  ; ce point est donc sur l'axe des abscisses. Comme le triangle  $OA_5A_6$  est rectangle en  $A_6$ , on trace le cercle de diamètre  $[OA_5]$  ; le point  $A_6$  est à l'intersection de ce cercle et de l'axe des abscisses.

Le point  $A_7$  a pour affixe  $z_7$  qui a pour argument  $\frac{7\pi}{6}$  ; donc les points  $A_1$ ,  $O$  et  $A_7$  sont alignés. Le point  $A_7$  se trouve donc à l'intersection du cercle de diamètre  $[OA_6]$  et de la droite  $(OA_1)$ .

Etc. (Voir figure en annexe)

Remarque : les points  $A_3$  et  $A_9$  appartiennent à l'axe des ordonnées, ce qui correspond bien à la réponse trouvée à la question 4.b.



ANNEXE NON SPÉCIALITÉ

**EXERCICE 25** énoncé AmériqueNordS2015-exo-2.tex

1. (a) On applique les formules de récurrence proposées en utilisant un petit programme fait à la calculatrice.

On obtient :

$$A_0 (-4, 8; 1, 4) \quad A_1 (-4, 68; -1, 76) \quad A_2 (-2, 688; -4, 216)$$

(b) Voir plus bas :

```

Variables :
i, x, y, t : nombres réels

Initialisation :
x prend la valeur -3
y prend la valeur 4

Traitement :
Pour i allant de 0 à 20
    Construire le point de coordonnées (x ; y)
    t prend la valeur x
    x prend la valeur 0,8 × x - 0,6 × y .
    y prend la valeur 0,6 × t + 0,8 × y.
Fin Pour
    
```

**Remarque.** L'erreur à ne pas commettre ici était d'utiliser  $x$  dans le calcul de  $y$ . En effet, à ce stade,  $x$  a déjà été modifié. C'est d'ailleurs pour cela que l'algorithme propose de stocker temporairement l'ancienne valeur de  $x$  dans la variable  $t$ .

(c) On a identifié les points sur l'annexe en fonction de leurs coordonnées. Ils semblent appartenir à un cercle de centre  $O$  et de rayon  $5$ .

2. (a) Faisons une démonstration par récurrence puisque la suite  $z$  est définie par récurrence.

Au rang  $0$ ,  $|z_0| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$ . La propriété est vérifiée.

Fixons un entier  $p$  et supposons que  $|z_p| = \sqrt{x_p^2 + y_p^2} = 5$ .

Au rang  $p + 1$  :

$$\begin{aligned}
 |z_{p+1}| &= \sqrt{x_{p+1}^2 + y_{p+1}^2} \\
 &= \sqrt{(0,8x_p - 0,6y_p)^2 + (0,6x_p + 0,8y_p)^2} \\
 &= \sqrt{(0,8^2 + 0,6^2)x_p^2 + (0,6^2 + 0,8^2)y_p^2 + (0,8 \times 0,6 - 0,6 \times 0,8)x_p y_p} \\
 &= \sqrt{x_p^2 + y_p^2}. \text{ Or, par hypothèse, } \sqrt{x_p^2 + y_p^2} = 5. \text{ Donc :} \\
 |z_{p+1}| &= 5
 \end{aligned}$$

La propriété est donc héréditaire et initialisée.

Ainsi, pour tout  $n$ , on a bien  $u_n = |z_n| = 5$ , ce qui prouve notre conjecture concernant le lieu des points.

(b) Calculons, pour tout  $n$ , la forme algébrique de  $e^{i\theta} z_n$  :

$$\begin{aligned}
 e^{i\theta} z_n &= (\cos(\theta) + i \sin(\theta)) (x_n + i y_n) \\
 &= (0,8 + i0,6)(x_n + i y_n) \\
 &= (0,8x_n + i^2 0,6y_n) + (0,6x_n + 0,8y_n)i \\
 &= (0,8x_n - 0,6y_n) + (0,6x_n + 0,8y_n)i
 \end{aligned}$$

On reconnaît les formules de récurrence de  $x_{n+1}$  et  $y_{n+1}$  :

$$\begin{aligned}
 e^{i\theta} z_n &= x_{n+1} + y_{n+1}i \\
 &= z_{n+1}
 \end{aligned}$$

(c)  $z$  est une suite géométrique de raison  $e^{i\theta}$  sur des complexes. Comme cette notion n'est pas au programme, nous allons redémontrer la formule explicite.

Pour  $n = 0$  la formule est bien sûr vraie. Supposons-la vraie à un rang  $p$  fixé :  $z_p = e^{ip\theta} z_0$ .

Mais nous savons que  $z_{p+1} = e^{i\theta} z_p = e^{i\theta} e^{ip\theta} z_0$ . On a ainsi :

$$z_{p+1} = e^{ip\theta+i\theta} z_0 = e^{i(p+1)\theta} z_0.$$

La propriété est donc héréditaire et initialisée.

Ainsi, pour tout  $n$ , on a bien  $z_n = e^{in\theta} z_0$ .

(d) Posons  $\theta_0 = \arg(z_0)$ . Par définition :

$$\frac{z_0}{|z_0|} = \cos(\theta_0) + i \sin(\theta_0). \text{ Or : } \frac{z_0}{|z_0|} = \frac{-3}{5} + i \frac{4}{5}$$

= -0,6 + i0,8. On reconnaît les valeurs de cos et sin de  $\theta$  :

= -sin( $\theta$ ) + i cos( $\theta$ ). En utilisant les formules de trigonométrie, on a :

$$\frac{z_0}{|z_0|} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$$

On a donc bien, en identifiant la première et la dernière ligne,  $\arg(z_0) = \theta_0 = \frac{\pi}{2} + \theta$

**Remarque.** On pouvait également calculer la forme algébrique de  $|z_0| e^{i(\frac{\pi}{2}+\theta)}$  et montrer qu'elle était identique à celle de  $z_0$ . Cette méthode est d'ailleurs certainement plus « facile » à mettre en œuvre.

(e) On utilise les propriétés de l'argument :

$$\arg(z_n) = \arg\left(e^{in\theta} z_0\right) = \arg\left(e^{in\theta}\right) + \arg(z_0) = n\theta + \frac{\pi}{2} + \theta = (n+1)\theta + \frac{\pi}{2}$$

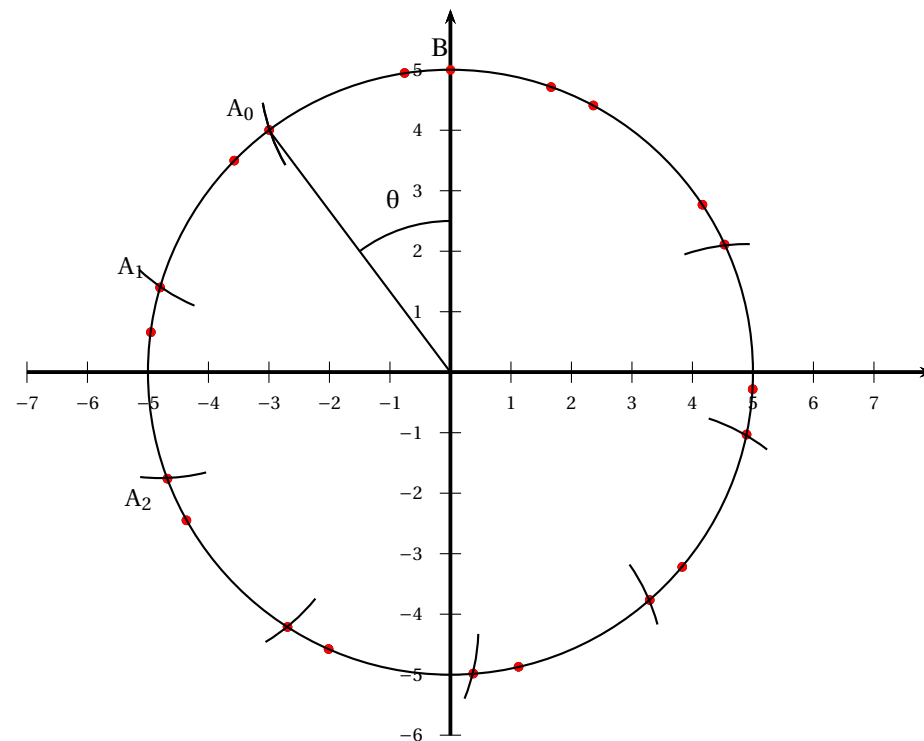
On représente  $\theta$  en utilisant le point  $A_0$ . En effet, ce point vérifie  $(\vec{i}; \vec{OA}_0) = \arg(z_0) = \theta + \frac{\pi}{2}$ .

Ainsi, on obtient facilement, par différence, que  $(\vec{j}; \vec{OA}_0) = \theta$ .

On a tracé  $\theta$  en annexe en utilisant cette dernière remarque.

Pour obtenir  $A_{n+1}$  :

À partir du point  $A_n$ , on se déplace d'un angle  $\theta$  sur le cercle de rayon 5 et de centre O pour obtenir  $A_{n+1}$ . Cette opération peut se faire à l'aide d'un compas en reportant une longueur correspondant à  $\theta$ .



**Annexe**

**EXERCICE 26** énoncé Amérique du Nord 2012

**PARTIE A.**

1. Un quart des femmes et un tiers des hommes adhère à la section tennis, donc  $p_F(T) = \frac{1}{4}$  et  $p_{\bar{F}}(T) = \frac{1}{3}$ . 30 % des membres de cette association adhèrent à la section tennis, donc  $p(T) = \frac{3}{10}$ .

F et  $\bar{F}$  forment une partition, d'après le théorème des probabilités totales, on a :  $p(T) = p(T \cap F) + p(T \cap \bar{F}) = p_F(T)p(F) + p_{\bar{F}}(T)p(\bar{F}) = \frac{1}{4}p(F) + \frac{1}{3}(1 - p(F)) = \frac{3}{10}$ . On en déduit que  $\frac{1}{12}p(F) = \frac{1}{3} - \frac{3}{10}$  soit  $p(F) = \frac{2}{5}$ .

2. Il s'agit de calculer  $p_T(F)$ . Or  $p_T(F) = \frac{p(T \cap F)}{p(T)} = \frac{p(F)p_F(T)}{p(T)} = \frac{\frac{2}{5} \times \frac{1}{4}}{\frac{3}{10}} = \frac{1}{3}$ .

**PARTIE B.**

1. (a) C'est une répétition d'une expérience aléatoire à deux issues, identique et indépendante. La variable aléatoire X, donnant le nombre de membres adhérant à la section tennis parmi les membres choisis, suit donc la loi binomiale de paramètres  $n = 4$  (nombre d'épreuves) et  $p = \frac{3}{10}$ . On souhaite deux succès, la probabilité est donc  $p(X = 2) = \binom{4}{2} \times \left(\frac{3}{10}\right)^2 \times \left(1 - \frac{3}{10}\right)^{4-2} = \binom{4}{2} \times \left(\frac{3}{10}\right)^2 \times \left(\frac{7}{10}\right)^{4-2} = \frac{1323}{5000} \approx 0,2646$ .

(b) Il suffit de considérer l'évènement contraire qui consiste à ne choisir aucun membre du club de tennis  $n$  fois, soit  $\left(\frac{7}{10}\right)^n$ . Le résultat est donc  $p_n = 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n$ .

(c)  $p_n \geq 0,99$ ,  $1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n \geq 0,99$ ,  $\left(\frac{7}{10}\right)^n \leq 0,01$ ,  $\ln\left(\left(\frac{7}{10}\right)^n\right) \leq \ln(0,01)$  car la fonction  $\ln$  est croissante.

$$n \ln\left(\frac{7}{10}\right) \leq \ln(0,01), \quad n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln\left(\frac{7}{10}\right)} \quad \text{car } \ln\left(\frac{7}{10}\right) < 0. \quad n \geq 12,9, \text{ i.e. } n \geq 13.$$

2. (a) Les gains algébriques possibles sont -5, 15, et 35.

$Y = y_i$	-5	15	35
$p(Y = y_i)$	$\frac{\begin{pmatrix} 90 \\ 2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 100 \\ 2 \end{pmatrix}} = \frac{89}{110}$	$\frac{\begin{pmatrix} 90 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 100 \\ 2 \end{pmatrix}} = \frac{2}{11}$	$\frac{\begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 100 \\ 2 \end{pmatrix}} = \frac{1}{110}$

(b) L'espérance est donc  $E(Y) = \sum_i y_i p(Y = y_i) = -5 \times \frac{89}{110} + 15 \times \frac{2}{11} + 35 \times \frac{1}{110} = -1$ . Le jeu est en défaveur du joueur car l'espérance est négative ou encore qu'en moyenne, sur un grand nombre de parties, le joueur perd 1 euro par partie.

**EXERCICE 27** énoncé **Amerique du Nord 2013**

**Commun à tous les candidats**

*Les parties A B et C peuvent être traitées indépendamment les unes des autres*

Une boulangerie industrielle utilise une machine pour fabriquer des pains de campagne pesant en moyenne 400 grammes. Pour être vendus aux clients, ces pains doivent peser au moins 385 grammes. Un pain dont la masse est strictement inférieure à 385 grammes est un pain non-commercialisable, un pain dont la masse est supérieure ou égale à 385 grammes est commercialisable.

La masse d'un pain fabriqué par la machine peut être modélisée par une variable aléatoire  $X$  suivant la loi normale d'espérance  $\mu = 400$  et d'écart-type  $\sigma = 11$ .

*Les probabilités seront arrondies au millième le plus proche*

**Partie A**

*On pourra utiliser le tableau suivant dans lequel les valeurs sont arrondies au millième le plus proche.*

$x$	380	385	390	395	400	405	410	415	420
$P(X \leq x)$	0,035	0,086	0,182	0,325	0,5	0,675	0,818	0,914	0,965

- $P(390 \leq X \leq 410) = P(X \leq 410) - P(X < 390) = 0,818 - 0,182 = 0,636$ .
- Un pain choisi au hasard dans la production est commercialisable si et seulement si «  $X \geq 385$  ». «  $X \geq 385$  » est l'événement contraire de «  $X < 385$  ». On a donc  $p(X \geq 385) = 1 - p(X < 385) = 1 - 0,086 = 0,914$ .
- Le fabricant trouve cette probabilité  $p$  trop faible. Il décide de modifier ses méthodes de production afin de faire varier la valeur de  $\sigma$  sans modifier celle de  $\mu$ .

Soit  $Y$  la variable aléatoire de paramètres  $\mu = 400$  et  $\sigma$ , on a :

$$p(X \geq 385) = 0,96 \Leftrightarrow 1 - p(Y < 385) = 0,96 \Leftrightarrow p(Y < 385) = 0,04$$

Si  $Y$  suit une loi normale de paramètres  $\mu = 400$  et  $\sigma$ , on sait que  $Z = \frac{Y - 400}{\sigma}$  suit une loi normale centrée réduite et  $p(Y < 385) = 0,04 \Leftrightarrow P\left(Z \leq \frac{385 - 400}{\sigma}\right) = 0,04$ .

$$\text{Or } P(Z \leq -1,751) \approx 0,040. \text{ On a donc : } \frac{-15}{\sigma} = -1,751 \Leftrightarrow \sigma = \frac{15}{1,751} = 8,6.$$

Pour  $\sigma = 8,6$ , au dixième près ; la probabilité qu'un pain soit commercialisable est de 96%

**Partie B**

Les méthodes de production ont été modifiées dans le but d'obtenir 96 % de pains commercialisables.

Afin d'évaluer l'efficacité de ces modifications, on effectue un contrôle qualité sur un échantillon de 300 pains fabriqués.

- L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de pains commercialisables dans un échantillon de taille 300 est de la forme

$$I_{300} = \left[ p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

avec  $p = 0,96$  et  $n = 300$ .

$$\text{On a donc : } I_{300} = [0,93 ; 0,99]$$

- Parmi les 300 pains de l'échantillon, 283 sont commercialisables. Ce qui représente 94 % de la production.

Au regard de l'intervalle de fluctuation obtenu à la question 1, on accepte que l'objectif a été atteint.

**Partie C**

Le boulanger utilise une balance électronique. Le temps de fonctionnement sans dérèglement, en jours, de cette balance électronique est une variable aléatoire  $T$  qui suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ .

1. On sait que la probabilité que la balance électronique ne se dérègle pas avant 30 jours est de  $p(T \geq 30) = 0,913$ .

$$\text{On a par ailleurs : } p(T \leq 30) = \int_0^{30} \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_0^{30} = 1 - e^{-30\lambda}.$$

On en déduit :  $p(T \geq 30) = 1 - p(T \leq 30) = e^{-30\lambda}$  et finalement :

$$e^{-30\lambda} = 0,913 \Leftrightarrow -30\lambda = \ln(0,913) \Leftrightarrow \lambda = 0,003.$$

Dans toute la suite on prendra  $\lambda = 0,003$ .

2. Calculons  $p_{T \geq 60}(T \geq 90)$ .

$$\text{On a } p_{T \geq 60}(T \geq 90) = \frac{p((T \geq 60) \cap (T \geq 90))}{p(T \geq 60)} = \frac{p(T \geq 90)}{p(T \geq 60)} = \frac{1 - p(T \leq 90)}{1 - p(T \leq 60)} = \frac{e^{-90\lambda}}{e^{-60\lambda}} = e^{-30\lambda}.$$

Avec  $\lambda = 0,003$ , on a donc  $p_{T \geq 60}(T \geq 90) = p(T \geq 30) = 0,913$ .

La probabilité que la balance électronique fonctionne encore sans dérèglement après 90 jours, sachant qu'elle a fonctionné sans dérèglement 60 jours est 0,913 (loi à durée de vie sans vieillissement !)

3. Le vendeur de cette balance électronique a assuré au boulanger qu'il y avait une chance sur deux pour que la balance ne se dérègle pas avant un an. Calculons la durée maximale  $t_{max}$  pour laquelle la probabilité que la balance dérègle est inférieure à 0,5.

$$p(T \leq t_{max}) \leq 0,5 \Leftrightarrow \int_0^{t_{max}} \lambda e^{-\lambda x} dx \leq 0,5 \Leftrightarrow [-e^{-\lambda x}]_0^{t_{max}} \leq 0,5 \Leftrightarrow 1 - e^{-\lambda t_{max}} \leq 0,5$$

$$1 - e^{-\lambda t_{max}} \leq 0,5 \Leftrightarrow e^{-\lambda t_{max}} \geq 0,5 \Leftrightarrow -\lambda t_{max} \geq \ln 0,5$$

Avec  $\lambda = 0,003$ , on trouve  $t_{max} = 231$ . Le vendeur avait donc tort.

#### Exercice 4

5 points

**EXERCICE 28** énoncé Antilles septembre 2013

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

**Partie A** : modélisation et simulation

1.  $(-1; 1)$  : non car  $x < 0$  ce qui n'est pas possible ;

$(10; 0)$  : oui par exemple en choisissant 10 fois la valeur 0 pour  $y$  ;

$(2; 4)$  : non car  $y > 2$  ;

$(10; 2)$  : oui par exemple en choisissant dans cet ordre 8 fois la valeur 0 puis deux fois la valeur 1 pour  $y$ .

2. Pour que Tom ait réussi la traversée, il faut qu'il soit arrivé au bout des 10 étapes, c'est-à-dire que  $x = 10$  et qu'il ne tombe pas lors de cette dernière étape, ce qui est encore possible si sa position à l'étape précédente était  $(9; 1)$  ou  $(9; -1)$  ; il faut donc tester également si  $y$  n'est pas plus grand que 1 ou plus petit que  $-1$  en fin d'algorithme.

On remplace dans l'algorithme la ligne :

Afficher « la position de Tom est »  $(x; y)$  |

par :

Si  $x = 10$  et  $y \geq -1$  et  $y \leq 1$

alors Afficher « Tom a réussi la traversée »

sinon Afficher « Tom est tombé »

Fin du si

**Partie B**

Pour tout  $n$  entier naturel compris entre 0 et 10, on note :

$A_n$  l'évènement « après  $n$  déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée  $-1$  ».

$B_n$  l'évènement « après  $n$  déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée 0 ».

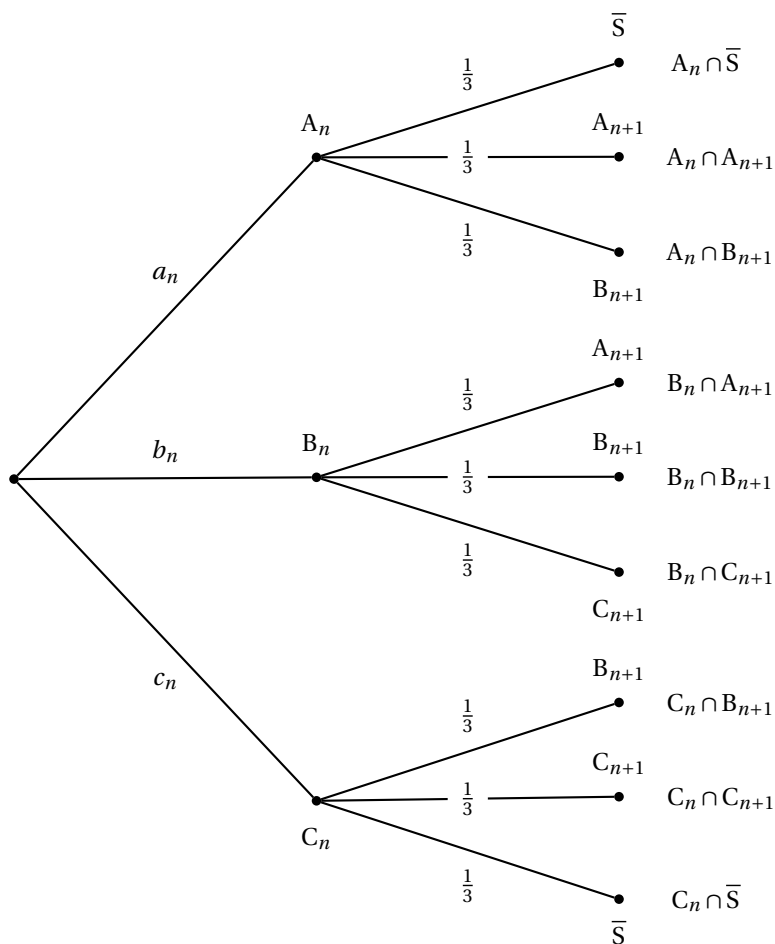
$C_n$  l'évènement « après  $n$  déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée 1 ».

On note  $a_n, b_n, c_n$  les probabilités respectives des évènements  $A_n, B_n, C_n$ .

1. Au départ, Tom se trouve à l'origine  $O$  donc son ordonnée est 0 ; donc l'évènement  $B_0$  est réalisé :  $a_0 = 0, b_0 = 1$  et  $c_0 = 0$ .

2. On va représenter sur un arbre pondéré le passage de l'état  $n$  à l'état  $n+1$  ; une branche vers le haut signifie que le nombre choisi au hasard est  $-1$ , une branche du milieu signifie que le nombre est 0 et une branche vers le bas signifie que ce nombre vaut 1.

Il est dit dans le texte que  $S$  représente l'évènement « Tom traverse le pont » donc  $\bar{S}$  désigne l'évènement « Tom est tombé à l'eau ».



D'après la formule des probabilités totales :

$$a_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1}) \\ = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}) = a_n \times \frac{1}{3} + b_n \times \frac{1}{3} = \frac{a_n + b_n}{3}$$

De même  $b_{n+1} = P(B_{n+1}) = a_n \times \frac{1}{3} + b_n \times \frac{1}{3} + c_n \times \frac{1}{3} = \frac{a_n + b_n + c_n}{3}$

et  $c_{n+1} = P(C_{n+1}) = b_n \times \frac{1}{3} + c_n \times \frac{1}{3} = \frac{b_n + c_n}{3}$

3.  $P(A_1) = a_1 = \frac{a_0 + b_0}{3} = \frac{1}{3}$  ;  $P(B_1) = b_1 = \frac{a_0 + b_0 + c_0}{3} = \frac{1}{3}$  ;

$P(C_1) = c_1 = \frac{b_0 + c_0}{3} = \frac{1}{3}$ .

4. Tom se trouve sur le pont au bout de deux déplacements si l'ordonnée  $y$  de sa position vaut  $-1$ ,  $0$  ou  $1$ , autrement dit dans le cas de l'événement  $A_2 \cup B_2 \cup C_2$ . Les trois événements  $A_2$ ,  $B_2$  et  $C_2$  sont incompatibles donc  $P(A_2 \cup B_2 \cup C_2) = P(A_2) + P(B_2) + P(C_2)$ .

$$a_2 = \frac{a_1 + b_1}{3} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}}{3} = \frac{2}{9} ; b_2 = \frac{a_1 + b_1 + c_1}{3} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}}{3} = \frac{1}{3} ;$$

$$c_2 = \frac{b_1 + c_1}{3} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}}{3} = \frac{2}{9}.$$

$$P(A_2 \cup B_2 \cup C_2) = P(A_2) + P(B_2) + P(C_2) = a_2 + b_2 + c_2 = \frac{2}{9} + \frac{1}{3} + \frac{2}{9} = \frac{7}{9}.$$

La probabilité que Tom se trouve sur le pont après deux déplacements est  $\frac{7}{9}$ .

5. Pour la même raison que dans la question précédente, la probabilité que Tom traverse le pont est  $P(A_{10} \cup B_{10} \cup C_{10}) = P(A_{10}) + P(B_{10}) + P(C_{10}) = a_{10} + b_{10} + c_{10} \approx 0,040272 + 0,056953 + 0,040272 \approx 0,137497$  (d'après le tableau fourni).

Une valeur approchée à  $0,001$  près de la probabilité que Tom traverse le pont est  $0,137$ .

**EXERCICE 29** énoncé **Pondichéry 2013**

**Commun à tous les candidats**

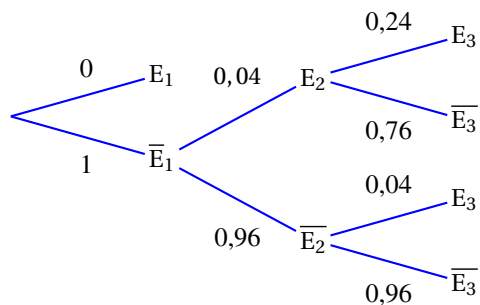
Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

- Un salarié malade est absent
- La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
- Si la semaine  $n$  le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine  $n + 1$  avec une probabilité égale à  $0,04$ .
- Si la semaine  $n$  le salarié est malade, il reste malade la semaine  $n + 1$  avec une probabilité égale à  $0,24$ .

On désigne, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 1, par  $E_n$  l'évènement « le salarié est absent pour cause de maladie la  $n$ -ième semaine ». On note  $p_n$  la probabilité de l'évènement  $E_n$ .

On a ainsi :  $p_1 = 0$  et, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 1 :  $0 \leq p_n < 1$ .

**1. (a)** Déterminer la valeur de  $p_3$  à l'aide d'un arbre de probabilité.



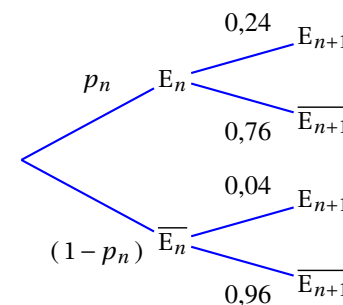
Théorème des probabilités totales :  $E_3 = E_2 \cap E_3 \cup \overline{E_2} \cap E_3$  (union d'évènements disjoints)

$$p_3 = P(E_3) = 0,04 \times 0,24 + 0,96 \times 0,04 = 0,048.$$

**(b)** Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.

$$P_{E_3}(E_2) = \frac{P(E_2 \cap E_3)}{P(E_3)} = \frac{0,04 \times 0,24}{0,048} = \frac{1}{5} = 0,2.$$

**2. (a)** Complétons l'arbre



**(b)** En appliquant le théorème des probabilités totales :

$$E_{n+1} = E_n \cap E_{n+1} \cup \overline{E_n} \cap E_{n+1} \text{ (union d'évènements disjoints)}$$

$$p_{n+1} = 0,24p_n + 0,04(1 - p_n) = (0,24 - 0,04)p_n + 0,04 = 0,2p_n + 0,04$$

**(c)** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$u_{n+1} = p_{n+1} - 0,05 = 0,2p_n + 0,04 - 0,05 = 0,2p_n - 0,01 = 0,2(p_n - 0,05) = 0,2u_n$$

donc  $(u_n)$  est la suite géométrique de premier terme  $u_1 = -0,05$  et la raison  $r = 0,2$ .

Par propriété, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $u_n = u_1 \times r^{n-1} = -0,05 \times 0,2^{n-1}$

et donc :  $p_n = u_n + 0,05 = 0,05(1 - 0,2^{n-1})$ .

**(d)** Limite de la suite  $(p_n)$ .

Comme  $|0,2| < 1$  alors par théorème :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,2)^{n-1} = 0$  et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0,05$ .

**(e)** Le nombre  $J$  qui est affiché en sortie d'algorithme est le rang du premier terme de la suite  $(p_n)$  qui s'approche de la limite  $0,05$  à  $10^{-K}$  près, où  $K$  est un entier fixé au départ.

La convergence de l'algorithme est assurée par l'existence de la limite vue en (d).

**3. (a)** • Une semaine donnée, on peut définir une épreuve de Bernoulli, où le succès est l'évènement E « un salarié est absent pour maladie. »

• L'état de chaque salarié étant supposé indépendant de l'état des autres, on obtient donc un Schéma de Bernoulli sur les 220 salariés de l'entreprise.

• La variable aléatoire  $X$  qui donne le nombre de succès dans ce schéma de Bernoulli suit, par propriété, la loi binomiale  $\mathcal{B}(220 ; 0,05)$ .

Par propriété,

$$\mu = E(X) = np = 220 \times 0,05 = 11 \quad \text{et} \quad \sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{220 \times 0,05 \times 0,95} \approx 3,23.$$

**(b)** On a bien :

$n \geq 30$ ,  $np \geq 5$  et  $n(1-p) \geq 5$ , donc la loi de  $X$  peut être approchée par la loi normale  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .  
Donc la loi de  $\frac{X-\mu}{\sigma}$  peut être approchée par une loi normale  $\mathcal{N}(0 ; 1)$ .

La probabilité de l'évènement : « le nombre de salariés absents dans l'entreprise au cours d'une semaine donnée est supérieur ou égal à 7 et inférieur ou égal à 15 » se note

$P(7 \leq X \leq 15)$ .

$$\left. \begin{array}{l} \frac{7-11}{3,23} \approx -1,238 \\ \frac{15-11}{3,23} \approx 1,238 \end{array} \right\} \text{ donc } P(7 \leq X \leq 15) \approx P(-1,24 < Z < 1,24)$$

Au moyen de la table fournie :

$$P(-1,24 < Z < 1,24) = P(Z < 1,24) - P(Z < -1,24) = 0,892 - 0,108 = 0,784.$$

À  $10^{-2}$  près, on a donc  $P(7 \leq X \leq 15) \approx 0,78$ .

**EXERCICE 30** énoncé **Asie 2015**

**Commun à tous les candidats**

Dans les questions 1 et 2, on munit l'espace d'un repère orthonormé, et on considère les plans  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  d'équations respectives  $x + y + z - 5 = 0$  et  $7x - 2y + z - 2 = 0$ .

**1. Affirmation 1 :** les plans  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  sont perpendiculaires.

Le plan  $\mathcal{P}_1$  a pour vecteur normal  $\vec{n}_1 : (1; 1; 1)$  et le plan  $\mathcal{P}_2$  a pour vecteur normal  $\vec{n}_2 : (7; -2; 1)$ .

$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 7 - 2 + 1 = 6 \neq 0$  donc ces deux vecteurs ne sont pas orthogonaux et donc les plans  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  ne sont pas perpendiculaires.

**Affirmation 1 : FAUSSE**

**2. Affirmation 2 :** les plans  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  se coupent suivant la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t + 1 \\ z = -3t + 4 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

On a vu dans la question précédente que les plans  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  avaient respectivement pour vecteurs normaux  $\vec{n}_1 : (1; 1; 1)$  et  $\vec{n}_2 : (7; -2; 1)$  ; ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les plans ne sont pas parallèles. Les plans  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  sont donc sécants.

Soit  $d$  la droite de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t + 1 \\ z = -3t + 4 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Pour voir si cette droite est l'intersection des plans  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$ , il suffit de déterminer deux points de cette droite et de vérifier s'ils appartiennent aux deux plans.

- En remplaçant  $t$  par 0 dans la représentation paramétrique de la droite  $d$ , on obtient le point  $A(0; 1; 4)$ . Or  $x_A + y_A + z_A - 5 = 0 + 1 + 4 - 5 = 0$  donc  $A \in \mathcal{P}_1$ , et  $7x_A - 2y_A + z_A - 2 = 0 - 2 + 4 - 2 = 0$  donc  $A \in \mathcal{P}_2$ . On peut dire que  $A \in \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ .

- En remplaçant  $t$  par 1 dans la représentation paramétrique de la droite  $d$ , on obtient le point  $B(1; 3; 1)$ . Or  $x_B + y_B + z_B - 5 = 1 + 3 + 1 - 5 = 0$  donc  $B \in \mathcal{P}_1$ , et  $7x_B - 2y_B + z_B - 2 = 7 - 6 + 1 - 2 = 0$  donc  $B \in \mathcal{P}_2$ . On peut dire que  $B \in \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ .

L'intersection des deux plans  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  est la droite (AB) de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t + 1 \\ z = -3t + 4 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

**Affirmation 2 : VRAIE**

**3. Affirmation 3 :** au niveau de confiance de 95 %, la proportion de parties gagnées doit appartenir à l'intervalle  $[0,658; 0,771]$ .

Le joueur gagne avec une fréquence de  $f = \frac{223}{312} \approx 0,7147$ .

L'échantillon est de taille  $n = 312 > 30$  ;  $n \times f = 223 > 5$  et  $n \times (1 - f) = 89 > 5$ .

Donc on peut déterminer l'intervalle de confiance au seuil 95 % :

$$I = \left[ f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] = \left[ \frac{223}{312} - \frac{1}{\sqrt{312}}; \frac{223}{312} + \frac{1}{\sqrt{312}} \right] \approx [0,658; 0,771].$$

**Affirmation 3 : VRAIE**

**Remarque du correcteur** -- En fait, les deux bornes de l'intervalle ont pour valeurs approchées à  $10^{-4}$  les nombres 0,658 1 et 0,771 4 ; la règle veut que l'on arrondisse par défaut la borne inférieure, et par excès la borne supérieure, pour que l'intervalle obtenu contienne l'intervalle donné par la formule ; l'intervalle obtenu serait alors  $[0,658; 0,772]$  ce qui rendrait l'affirmation fausse.

Mais était-ce vraiment l'intention du concepteur du sujet de « jouer » sur la troisième décimale ? Il faudrait, pour en être sûr, avoir les consignes de correction.

**4.** On considère l'algorithme suivant :

VARIABLES	$a, b$ sont deux nombres réels tels que $a < b$ $x$ est un nombre réel $f$ est une fonction définie sur l'intervalle $[a ; b]$
TRAITEMENT	Lire $a$ et $b$ Tant que $b - a > 0,3$ $x$ prend la valeur $\frac{a+b}{2}$ Si $f(x)f(a) > 0$ , alors $a$ prend la valeur $x$ sinon $b$ prend la valeur $x$ Fin Si Fin Tant que Afficher $\frac{a+b}{2}$

**Affirmation 4 :** si l'on entre  $a = 1, b = 2$  et  $f(x) = x^2 - 3$ , alors l'algorithme affiche en sortie le nombre 1,6875.

On fait tourner l'algorithme avec les valeurs de  $a$ , de  $b$  et l'expression de  $f$  données dans le texte, et on va décrire ce qui se passe à chaque étape en affichant l'état des variables  $a, b$  et  $x$  :

	$a$	$b$	$x$
$a$ reçoit la valeur 1	1		
$b$ reçoit la valeur 2	1	2	
$b - a = 1 > 0,3$ donc on entre dans la boucle	1	2	
$x$ prend la valeur $\frac{a+b}{2} = 1,5$	1	2	1,5
$f(a) = 1^2 - 3 = -2$	1	2	1,5
$f(x) = 1,5^2 - 3 = -0,75$	1	2	1,5
$f(x) \times f(a) > 0$ donc $a$ prend la valeur $x = 1,5$	1,5	2	1,5
fin du tant que	1,5	2	1,5
$b - a = 0,5 > 0,3$ donc on entre dans la boucle	1,5	2	1,5
$x$ prend la valeur $\frac{a+b}{2} = 1,75$	1,5	2	1,75
$f(a) = 1,5^2 - 3 = -0,75$	1,5	2	1,75
$f(x) = 1,75^2 - 3 = 0,0625$	1,5	2	1,75
$f(x) \times f(a) < 0$ donc $b$ prend la valeur $x = 1,75$	1,5	1,75	1,75
fin du tant que	1,5	1,75	1,75
$b - a = 0,25 \leq 0,3$ donc on n'entre pas dans la boucle	1,5	1,75	1,75
On affiche $\frac{a+b}{2} = \frac{1,5+1,75}{2} = 1,625$	1,5	1,75	1,75

**Affirmation 4 : FAUSSE**

*Il s'agit de l'algorithme de recherche par dichotomie de la solution positive de l'équation  $x^2 - 3 = 0$ .*