Sommaire

Chapitre 1

Divisibilités et congruences

I Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

1. Multiples et diviseurs d'un entier relatif

Définition

Soient a et b deux entiers.
S'il existe un entier k tel que $a = kb$, on dit que a est un **multiple** de b.
Si de plus $b \neq 0$, on dit que b **divise** a ou que b **est un diviseur de** a.

Exemple 1 :

- 63 est multiple de -7 car ______
- l'ensemble des multiples de 3 est ______
- -23 divise -276. En effet $-276 =$ ______
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n-1$ divise n^2+3n-4. ______

Remarques :

- 0 est multiple de tout entier et donc tout entier relatif est un diviseur de 0.
- 0 a un seul multiple : lui même.
- Tout entier relatif est un diviseur de 0.
- Notation : Si a divise b on note $a \mid b$.
- Tout entier relatif a admet au moins pour diviseurs 1, a, -1 et $-a$.

Propriété

Tout entier non nul n admet un nombre fini de diviseurs compris entre $-n$ et n.

Démonstration : $\square$

Propriété

Si $a \mid b$ et $b \mid a$ alors $a = b$ ou $a = -b$.

Démonstration : $\square$

Exemple 2 : p et n sont des entiers tels que $p \mid n$ et $-p < n < p$, que peut-on dire de n ?

Propriété

Soient n, p et q des entiers naturels.
Si $n = pq$ et $p \leqslant q$ alors $p \leqslant \sqrt{n}$.

Démonstration : $\square$

Exemple 3 : Déterminons la liste des diviseurs positifs de 90.

2. Propriété de la divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Propriété

Soient a, b et c trois entiers.
Si $a \mid b$ et $b \mid c$ alors $a \mid c$.

Démonstration :

$\square$

Propriété

Si $a \mid b$ et $a \mid c$ alors pour tous entiers u et v,

$$a \mid ub + vc.$$

Démonstration :

$\square$

Remarque : En particulier, si $a \mid b$ et $a \mid c$ alors $a \mid b + c$ et $a \mid b - c$.

Exemple 4 :

- Soit $n \in \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{Z}$ tel que $a \mid n - 3$ et $a \mid 2n + 1$. Montrons que $a \mid 7$.

- $3 \mid 3^n$ et $3 \mid 21$ donc

Savoir-faire 1 **Utiliser les propriétés**

1. Déterminer les entiers n tels que $n + 4$ divise $n + 17$.

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, démontrer que si un entier naturel d divise $10k+3$ et $6k+1$ alors il divise 4.

Savoir-faire 2 **Prouver une divisibilité par récurrence**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer que $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7.

Savoir-faire 3 **Résoudre une équation dans $\mathbb{N}$**

Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation $x^2 - 4y^2 = 20$.

II Division euclidienne

1. Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$

Propriété admise

Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

Propriété

Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Il existe un unique couple d'entiers $(q ; r)$ tels que $a = bq + r$ et $0 \leqslant r < b$.

Démonstration :

- Existence :

- Unicité :

□

Définition

$a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ étant donnés, effectuer la division euclidienne de a par b c'est trouver le couple $(q\,;r)$ tel que $a = bq + r$ et $0 \leqslant r < b$.
a est le dividende, b le diviseur, q le quotient et r le reste.

Exemple 1 :

- $a = 58,\ b = 17$
- $a = -10,\ b = 4$

Étant donnés $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, l'entier relatif q est le quotient de la division euclidienne de a par b si, et seulement si, $bq \leqslant a < b(q+1)$.

Le quotient q de la division euclidienne de a par b, vérifie donc $q \leqslant \dfrac{a}{b} < q+1$, c'est à dire que q est égal à la partie entière de $\dfrac{a}{b}$.

Définition — partie entière

La partie entière d'un nombre réel x est l'unique entier relatif n tel que

$$n \leqslant x < n+1,$$

elle correspond au plus grand entier inférieur à x.
La partie entière de x se note usuellement $\mathrm{E}(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$.

Application : algorithme de calcul du quotient et du reste de deux entiers $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$.
⚠ b doit être positif sinon l'algorithme ne donne pas les bonnes valeurs !
Pour le calcul de la partie entière, les calculatrices fournissent les fonctions `int` ou `partEnt`
Le calcul du reste peut se faire directement à l'aide de `remainder` pour les TI et `MOD` pour les casio.

VARIABLES : Entier : $a,\ b,\ q,\ r$
DEBUT
  lire(a)
  lire(b)
  $q \leftarrow \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$
  $r \leftarrow a - qb$
  afficher(q)
  afficher(r)
FIN

Remarques :

- Étant donnés $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, b est un diviseur de a si, et seulement si, le reste de la division euclidienne de a par b est égal à 0.
- On peut étendre la division euclidienne à $b \in \mathbb{Z}^*$, on a alors :

Propriété

Soient $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}^*$. Il existe un unique couple d'entiers $(q\,;r)$ tel que $a = bq + r$ et $0 \leqslant r < |b|$.

Exemple 2 : Division euclidienne de -19 par -5 :

2. Écriture d'un entier relatif

Propriété

Dans la division euclidienne de $a \in \mathbb{Z}$ par $b \in \mathbb{N}^*$, il y a b restes possibles : $0, 1, \ldots, b-1$.
Ainsi, tout entier $a \in \mathbb{Z}$ s'écrit sous une, et une seule, des formes bq, $bq+1, \ldots$, $bq+b-1$ où q est le quotient dans la division euclidienne de a par b.

Exemple 3 : Soit $n \in \mathbb{Z}$.

- Il existe $k \in \mathbb{Z}$, tel que $n = 2k$ ou $n = 2k+1$.
- Il existe $k \in \mathbb{Z}$, tel que $n = 3k$ ou $n = 3k+1$ ou $n = 3k+2$.
- Il existe $k \in \mathbb{Z}$, tel que $n = 4k$ ou $n = 4k+1$ ou $n = 4k+2$ ou $n = 4k+3$.

Propriété

Soit b un entier naturel, $b \geqslant 2$.
Tout entier naturel n s'écrit de manière unique sous la forme

$$a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \ldots + a_1 b + a_0$$

où $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $i \in [\![0\,;k]\!]$, $0 \leqslant a_i < b$.

Démonstration : (idée de)

□

Remarque : C'est donc la division euclidienne qui rend possible le codage des entiers naturels dans une base donnée $b \geqslant 2$. Lorsque $b = 10$ il s'agit de la numération décimale de position et lorsque $b = 2$ on parle d'écriture binaire des entiers.

Exemple 4 :

-
-

Savoir-faire 4 **Effectuer une division euclidienne**

Sachant que $1\,159 = 47 \times 24 + 31$, en déduire le quotient q et le reste r de la division euclidienne de :

1. $1\,159$ par 47

2. $1\,159$ par 24

3. $-1\,159$ par 24

Savoir-faire 5 **Trouver des inconnues dans une division euclidienne**

1. La division euclidienne de 523 par un entier naturel non nul b a un quotient égal à 17. Déterminer les valeurs possibles de b et du reste r.

2. La division euclidienne de 256 par un entier naturel non nul b a un reste égal à 25, déterminer les valeurs possibles de b et du quotient q.

Savoir-faire 6 **Effectuer la division euclidienne de $a(n)$ par $b(n)$**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, effectuer la division euclidienne de a par b pour $a = 3n^2 + n$ et $b = n + 1$.

III Congruences

1. Définition

Définition

Soient $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
On dit que a est **congru à** b **modulo** $\boldsymbol{n}$ lorsque n divise $b - a$.
On note $a \equiv b\ (n)$ (ou $a \equiv b\ [n]$ ou $a \equiv b \pmod{n}$).

Propriété

Soient $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$a \equiv b\ (n) \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ a = b + kn.$$

Propriété

Soient $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$a \equiv b\ (n) \iff a \text{ et } b \text{ ont le même reste dans la division euclidienne par } n.$$

Démonstration : □

Exemple 1 :

- $197 \equiv 15 \ (26)$
- $4\,344 \equiv 294 \ (45)$

2. Propriétés

Propriété

Soient a, b et c des entiers et $n \in \mathbb{N}^*$.

- $n \mid a$ si, et seulement si, $a \equiv 0 \ (n)$.
- r est le reste de la division euclidienne de a par n si, et seulement si, $a \equiv r \ (n)$ et $0 \leqslant r < n$.
- $a \equiv a \ (n)$.
- Si $a \equiv b \ (n)$ alors $b \equiv a \ (n)$.
- Si $a \equiv b \ (n)$ et $b \equiv c \ (n)$ alors $a \equiv c \ (n)$.

3. Compatibilité avec les opérations

Propriété

Soient a, b, c et d des entiers et $n \in \mathbb{N}^*$.
Si $a \equiv b \ (n)$ et $c \equiv d \ (n)$ alors :

- $a + c \equiv b + d \ (n)$;
- $a - c \equiv b - d \ (n)$;
- $ac \equiv bd \ (n)$;
- pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a^k \equiv b^k \ (n)$.

Exemple 2 :

- Addition :

- Multiplication :

Remarque :

- Si $a \equiv b\ (n)$, comme $c \equiv c\ (n)$ on a $ac \equiv bc\ (n)$.
- En revanche, on ne peut pas simplifier (en divisant) une congruence. Par exemple $16 \equiv 20\ (4)$ mais on n'a pas $8 \equiv 10\ (4)$.

Démonstration :

□

Savoir-faire 7 **Prouver une divisibilité de $a(n)$ par b**

Démontrer que pour tout entier relatif n, $n\left(n^2-4\right)$ est divisible par 3.

Savoir-faire 8 **Déterminer le reste de la division de a^n par b**

Déterminer les restes des divisions euclidiennes par 11 de :

1. 3^{214}

2. 2^{152}

3. $1\,845^{3044}$

4. $1\,845^{3044}+3^{214}$

Savoir-faire 9 **Résoudre dans $\mathbb{Z}$ une équation du premier ordre modulo n**

1. Déterminer l'ensemble des entiers x tels que $5x+3 \equiv 4x+2 \ (5)$.

2. Déterminer l'ensemble des entiers x tels que $3x \equiv 7 \ (8)$

3. Déterminer l'ensemble des entiers x tels que $8x-6 \equiv 4x+2 \ (7)$

Savoir-faire 10 **Résoudre une équation par les congruences**

On considère l'équation dans $\mathbb{Z}$, (E) $x^2-3y^2=17$.

1. Montrer que si $(x\,;\,y)$ est solution de (E), alors $x^2 \equiv 2 \ (3)$.

2. Déterminer les congruences modulo 3 de x^2 suivant les congruences modulo 3 de x.

3. Résoudre l'équation (E).

Savoir-faire 11 **Établir un critère de divisibilité**

1. En utilisant la congruence $10 \equiv -1 \ (11)$, déterminer un critère de divisibilité par 11.

2. Les nombres $a = 28\,038\,758$ et $b = 6\,368\,431$ sont-ils divisibles par 11 ?

Divisibilité

1

1. Dresser la liste des diviseurs positifs des entiers 24, 49 et 126;

2. Dresser la liste des diviseurs dans $\mathbb{Z}$ des entiers précédents.

2

Un terrain rectangulaire a des dimensions en mètres qui sont des entiers.
Déterminer ses dimensions sachant que sa largeur est un multiple de 3, que sa longueur est impaire et que son aire est de $300\ \text{m}^2$.

3

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.
Regrouper les phrases ayant la même signification :

❶ a est un diviseur de b;

❷ a est divisible par b;

❸ a est un multiple de b;

❹ a divise b;

❺ Le reste de la division de a par b est zéro.

❻ Le quotient $\dfrac{a}{b}$ est un entier.

4

Existe-t-il un entier m qui soit multiple de 14 et diviseur de 100 ?

5

Montrer que si n est un entier pair, alors $n\left(n^2+20\right)$ est multiple de 8;

6

Montrer que la somme de deux entiers impairs consécutifs est un multiple de 4;

7

1. Déterminer le nombre de multiples de 17 compris entre 2000 et 3000;

2. Déterminer le nombre de multiples de 41 compris entre -1000 et 2000;

8

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $3\times 5^{2n-1}+2^{3n-2}$ est divisible par 17;

9

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $4^{2n}-2^n$ est divisible par 7;

10

a et b désignent entiers non nuls.

1. Développer $(a+b)^3$;

2. Montrer que 3 divise a^3+b^3 si, et seulement si, 3 divise $(a+b)^3$;

11

Soit n un entier. On pose $a=2n+7$ et $b=n+1$;

1. Calculer $a-2b$;

2. Soit d un entier divisant a et divisant b; Quelles sont les valeurs possibles de d ?

12

Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que $2n+9$ divise $n+11$;

13

Montrer que pour tout entier n, $51n+4$ n'est pas divisible par 17;

14

Soit n un entier et a un entier divisant $n-1$ et n^2+n+3;
Établir que a est un diviseur de 5;

15

Déterminer les entiers n tels que $n+2$ divise n^3-2;

16

Résoudre l'équation $3xy-y^2=25$, avec x et y entiers.

17

Résoudre l'équation $x^2=9y^2+7$, avec x et y entiers.

18

1. Développer $(x-5)\left(y-3\right)$;

2. Déterminer les couples d'entiers (x,y) solutions de l'équation :

$$xy=3x+5y.$$

19

On considère l'équation (E) : $x^3+x^2+bx+c=0$ où b et c sont des entiers.

1. Montrer que si l'entier a est une solution de (E), alors a divise c;

2. L'équation $x^3+3x+3=0$ a-t-elle des solutions entières ?

3. Et l'équation $x^3-15x-4=0$?

20

Le nombre n désigne un entier naturel.

1. Démontrer que n^2+5n+4 et n^2+3n+2 sont divisibles par $n+1$;

2. Déterminer l'ensemble des valeurs de n pour lesquelles $3n^2+15n+19$ est divisible par $n+1$;

3. En déduire que, quelque soit $n\in\mathbb{N}$, $3n^2+15n+19$ n'est pas divisible par n^2+3n+2;

21

On se propose de montrer qu'il existe une infinité de nombres entiers naturels qui vérifient une certaine propriété.

1. Vérifier que 111 est divisible par 3;

2. Soit $n \geqslant 3$ un entier naturel.
u_n est le nombre dont l'écriture décimale est constituée de n 1 :

$$u_n = \underbrace{\overline{11\ldots11}}_{n \text{ chiffres.}}$$

(a) Démontrer que 9 divise $10^n - 1$;

(b) Vérifier que pour tout nombres réels a et b :

$$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right).$$

(c) Démontrer que $10^{3n} - 1$ est divisible par $10^n - 1$;

(d) En déduire que u_{3n} est divisible par u_n;

(e) Démontrer que $10^{2n} + 10^n + 1$ est divisible par 3;

(f) Démontrer que u_{3n} est divisible par $3u_n$;

3. Démontrer qu'il existe une infinité de nombres entiers naturels dont l'écriture décimale est constituée exactement de n chiffres 1 et qui sont divisibles par n;

Division euclidienne

22

$434 = 23 \times 18 + 20$ est une division euclidienne. Identifier le dividende, le diviseur, le quotient et le reste.

23

Effectuer la division euclidienne de a par b dans les cas suivants :

1. $a = 5689$; $b = 7$;

2. $a = 7$; $b = 5689$;

3. $a = -5689$; $b = 7$;

4. $a = -7$; $b = 5689$;

24

Pour quels entiers n a-t-on $\left\lfloor \frac{n}{9} \right\rfloor = 0$;

25

Pour quels entiers n a-t-on $\left\lfloor \frac{n}{9} \right\rfloor = \frac{n}{9}$;

26

Déterminer tous les nombres entiers naturels qui divisés par 7 donnent un quotient égal au reste.

27

Trouver tous les entiers naturels qui, divisés par 7, donnent un quotient égal à 4 fois le reste.

28

La différence de deux entiers naturels a et b est égale à 779 et la division euclidienne de a par b donne 11 pour quotient et 49 pour reste.
Déterminer a et b;

29

a désigne un nombre entier naturel. Le reste dans la division euclidienne de a par 144 est 67; Quel est le reste de la division euclidienne de a :

1. par 72 ?

2. par 36 ?

3. par 18 ?

30

Une fourmi circule sur un anneau sur lequel sont placés dans l'ordre et dans le sens du parcours 8 points A_0, $A_1, \ldots, A_7$; Elle part de A_0 et elle met 10 minutes pour aller d'un point à un autre. Elle tourne ainsi pendant 5 h 40. En quel point se trouve-t-elle alors ?

31

1. Vérifier que $(n+1)^3 = n^2(n+3) + 3n + 1$;

2. Pour quels entiers naturels n, le reste de la division de $(n+1)^3$ par n^2 est-il $3n+1$?

32

n est un entier naturel. Déterminer selon les valeurs de n le reste de la division euclidienne de $9n+7$ par $2n+3$;

33

n désigne un nombre entier naturel, $n \geqslant 2$;

Déterminer le reste dans la division euclidienne de $4n-3$ par $2n+1$;

34

n désigne un nombre entier naturel.

Déterminer le reste dans la division euclidienne de $5n+21$ par $n+3$;

35

Soient a et b deux entiers naturels tels que $0 < b^2 < a$; Dans la division de $-a$ par b, le quotient est q et le reste est r;

1. Que sont les quotient et reste dans la division de a par q ?

2. Que se passe-t-il si $a < b^2$?

36

Quels sont les restes dans la division de $4n+8$ par $2n+1$ pour n entier naturel ?

37

À un code à quatre chiffres choisit dans la liste $\{0; 1; \ldots; 9\}$ et dont chaque chiffre peut-être répété, on associe une clé calculée à l'aide de l'algorithme suivant :

VARIABLES :
Entier : N est le code à quatre chiffres, P, S, K, U, R, C
DEBUT
  lire(N)
  P ← N
  S ← 0
  K ← 0
  tant que K < 4 **faire**
    U ← le chiffre des unités de P
    K ← K + 1
    S ← S + K × U
    P ← $\frac{P-U}{10}$
    R ← le reste de la division euclidienne de S par 7
    C ← 7 − R
  fintantque
  afficher("La clé est :")
  afficher(C)
FIN

1. Faire fonctionner l'algorithme avec $N = 2282$ et vérifier que la clé est 3;

2. Quelle est le premier chiffre du code ?732 sachant que la clé est 7 ?

38

1. Pouvez-vous trouver cinq entiers distincts tels que la différence de deux d'entre eux ne soit pas un multiple de 5 ? Pouvez-vous en trouver six ?

2. **(a)** Combien y a-t-il de restes possibles dans la division par 5 ?

(b) Considérons six entiers distincts et leurs restes dans la division par 5; Pourquoi deux de ces restes sont-ils forcément identiques ?

(c) Est-il possible de trouver six entiers distincts tels que la différence de deux d'entre eux ne soit pas un multiple de 5 ?

39

On considère l'algorithme ci-dessous :

VARIABLES :
Entier : a, q, m
DEBUT
  lire(a)
  q ← 0
  m ← 7
  tant que $m \leqslant a$ **faire**
    q ← $q+1$
    m ← $m+7$
  fintantque
  si $a - 7q = q$ **alors**
    afficher(OUI)
  sinon
    afficher(NON)
  finsi
FIN

Que fait cet algorithme ?

40

Écrire $\overline{56}^{10}$ en base 3;

41

Écrire $\overline{48}^{10}$ en base 5;

42

Écrire $\overline{3201}^{4}$ en base 10;

43

En utilisant des divisions euclidiennes, déterminer des entiers naturels strictement inférieurs à 5 a, b et c tels que

$$\frac{142}{5^3} = a + \frac{b}{5} + \frac{c}{5^2} + \frac{d}{5^3}.$$

En déduire l'écriture en base 5 de 142;

44

Soit $\overline{xyz}$ un nombre de 3 chiffres. Démontrer que la somme $\overline{xyz} + \overline{zxy} + \overline{yzx}$ des trois nombres obtenus par permutation circulaire est toujours un multiple de 111;

45

Déterminer le nombre s'écrivant en numération décimal $\overline{abcd}$, tel que :

$$\overline{abc} + \overline{dab} + \overline{cda} + \overline{bcd} = \overline{abcd}.$$

Congruences

46

Dans les cas suivants, déterminer une valeur de a qui vérifient les conditions demandées :

1. $a \equiv -6\ (3)$ et $0 \leqslant a < 3$;

2. $a \equiv 57\ (11)$ et $0 \leqslant a < 11$;

3. $a \equiv 283\ (7)$ et $-5 < a \leqslant 2$;

4. $a \equiv -512\ (5)$ et $65 \leqslant a 70$;

5. $a \equiv -12\ (10)$ et $35 \leqslant a < 45$;

6. $a \equiv 19\ (3)$ et $-10 < a \leqslant -7$.

47

On suppose que $a \equiv 3\ (5)$ et $b \equiv 4\ (5)$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $7a^2 + 4b^2$ par 5.

48

En utilisant les congruences, déterminer le reste dans la division euclidienne par 7 des nombres : $421^{120} \times 99^{15}$ et $93^{120} - 44^{120}$.

49

Déterminer le reste dans la division euclidienne par 5 et par 7 de 2016^{2016}.

50

1. Démontrer que $7^2 \equiv -1\ (5)$.

2. En déduire que $7^4 \equiv 1\ (5)$.

3. En déduire que, pour tout entier naturel k, $7^{4k} \equiv 1\ (5)$.

4. En déduire que $7^{4k+1} \equiv 2\ (5)$, $7^{4k+2} \equiv -1\ (5)$ et $7^{4k+3} \equiv -2\ (5)$.

5. En déduire les différents restes possibles de la division euclidienne de 7^n par 5.

51

1. Déterminer, suivant les congruences modulo 5 de l'entier naturel n, les congruences modulo 5 de $n^2 - 3n + 6$.

2. En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que $n^2 - 3n + 6$ soit divisible par 5.

52

On considère l'équation dans $\mathbb{Z}$: $2x^2 + 3y^2 = 16$ (E).
1. Montrer que si un couple d'entiers (x, y) est solution de l'équation (E), alors $2x^2 \equiv 1\ (3)$.

2. Déterminer les restes de la division de $2x^2$ par 3 et conclure.

53

On considère l'équation dans $\mathbb{Z}$: $3x^2 + 5y^2 = 16$ (E).
1. Montrer que si un couple d'entiers (x, y) est solution de l'équation (E), alors $3x^2 \equiv 1\ (5)$.

2. Déterminer les restes de la division de $3x^2$ par 5 et conclure.

54

1. Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n, les restes de la division euclidienne de 5^n par 13.

2. En déduire le reste de la division euclidienne de 1981^{1981} par 13.

3. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $31^{4n+1} + 18^{4n-1}$ est divisible par 13.

55

Déterminer les valeurs possibles du chiffre x tel que l'entier $\overline{71x4}$ soit divisible par 3.

56

Déterminer les chiffres x et y tels que l'entier $\overline{9x2y}$ soit divisible par 4 et par 3.

57

1. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $10^n \equiv 10\ (45)$.

2. En déduire un critère de divisibilité par 45.

3. Les entiers suivants sont-ils divisibles par 45 ?
(a) $a = 20152016$;

(b) $b = 20152035$.

58

1. Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne de 4^n par 7.

2. **(a)** Montrer que $851 \equiv 4\ (7)$.

(b) Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne de $A = 8513^{3n} + 8512^{2n} + 851^n$ par 7.

3. On considère le nombre B qui s'écrit en base 4 : $\overline{2103211}^4$, ce qui signifie que $B = 2 \times 4^6 + 1 \times 4^5 + \ldots + 1 \times 4^0$.
En utilisant la question **1.**, sans calculer explicitement B, déterminer dans le système décimal le reste de la division euclidienne de B par 7.

59

Le code d'identification d'un article est formé de sept chiffres entre 0 et 9. Les six premiers chiffres identifient l'article, le septième est une clé de contrôle destinée à déceler une erreur dans les six premiers.
On notera $x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7$ un tel code.
La clé de contrôle x_7 est le reste de la division euclidienne par 10 de la somme

$$N = x_1 + x_3 + x_5 + 7(x_2 + x_4 + x_6).$$

1. **(a)** Vérifier que le code suivant est correct : 2341547.

(b) Calculer la clé du code suivant : $923451\bullet$.

(c) Un des chiffres du code suivant a été effacé : $11\bullet2774$. Le calculer.

(d) Un des chiffres du code suivant a été effacé : $134\bullet752$. Le calculer.

2. Dans cette question un des chiffres du code est erroné : au lieu de saisir $x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7$ le dactylographe a frappé $x_1x_2x_3x_3x_5x_6x_7$.
(a) Écrire les somme N_1 et N_2 associées respectivement au deux codes précédent, puis calculer la différence $N_1 - N_2$.

(b) Montrer que l'équation $7a \equiv 0\ (10)$, où a est un entier compris entre 0 et 9, a pour seule solution 0.

(c) L'erreur de frappe sera-t-elle détectée ?

3. Dans cette question, deux chiffres du code ont été intervertis : au lieu de saisir $x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7$ le dactylographe a frappé $x_1x_3x_2x_4x_5x_6x_7$.
Donner un exemple de valeur de x_2 et x_3 pour lesquelles la clé de contrôle ne détecte pas l'erreur.

60

Soient a et n deux entiers naturels.
On appelle ordre de a modulo n le plus petit entier naturel s, s'il existe, tel que $a^5 \equiv 1\ (n)$.
1. On suppose qu'il existe m tel que $a^m \equiv 1\ (n)$.
En utilisant la propriété de $\mathbb{N}$ qui dit que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément, prouver que s existe.

2. **(a)** En effectuant la division euclidienne de m par s, prouver que s divise m.

(b) Montrer que quel que soit $n > 2$, $n-1$ est d'ordre 2 modulo n.
Application : $n = 7$.

3. **(a)** Montrer que pour tout entier naturel a non multiple de 7, $a^6 \equiv 1\ (7)$.

(b) Déterminer alors l'ordre de chacun des entiers non nuls strictement inférieurs à 7.

4. On pose $A_n = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$.
Existe-t-il des valeurs de n pour lesquelles A_n est divisible par 7 ?

61

n désigne un entier naturel.
On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par $u_0 = 14$ et $u_{n+1} = 5u_n - 6$ pour tout entier naturel n.
1. Calculer u_0, u_1, u_2, u_3 et u_4.
Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de u_n ?

2. Montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} \equiv u_n\ (4)$.
En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_{2k} \equiv 2\ (4)$ et $u_{2k+1} \equiv 0\ (4)$.

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2u_n = 5^{n+2} + 3$.
En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2u_n \equiv 28\ (100)$.

4. Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_n suivant les valeurs de n.
Soit d un diviseur commun à tous les u_n. Montrer que $d = 1$ ou $d = 2$.

62

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 10u_n + 21.$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. **(a)** Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$3u_n = 10^{n+1} - 7.$$

(b) En déduire l'écriture décimale de u_n.

3. Montrer que u_2 est un nombre premier.

4. Démontrer que, pour tout entier naturel n, u_n n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5.

5. **(a)** Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$3u_n \equiv 4 - (-1)^n\ (11).$$

(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n n'est pas divisible par 11.

6. **(a)** Donner le rester de la divisible euclidienne de 10^4 par 17.
En déduire que $10^{16} \equiv 1\ (17)$.

(b) En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, u_{16k+8} est divisible par 17.

63

On cherche à déterminer les couples (n, m) d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation :

$$7^n - 3 \times 2^m = 1\ \text{(E)}.$$

1. On suppose $m \leqslant 4$. Montrer qu'il y a exactement deux couples solutions.

2. On suppose maintenant que $m \geqslant 5$.
(a) Montrer que si le couple (n, m) vérifie la relation (E) alors $7^n \equiv 1\ (32)$.

(b) En étudiant les restes de la division par 32 des puissances de 7, montrer que si un couple (n, m) vérifie la relation (E) alors n est divisible par 4.

(c) En déduire que si le couple (n, m) vérifie la relation (E) alors $7^n \equiv 1\ (5)$.

(d) Pour $m \geqslant 5$, existe-t-il des couples (n, m) d'entiers naturels vérifiant la relation (E) ?

(e) Déterminer l'ensemble des couples (n, m) vérifiant la relation (E).

64

Les chiffres en base 12 sont : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, α et β. (α pour 10 et β pour 11).
Soit N d'écriture en base 12 : $N = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_0}$, c'est à dire $N = a_n \times 12^n + a_{n-1} \times 12^{n-1} + \dots + a_0$ où $a_n, \dots, a_0$ sont des chiffres de la base 12.
1. **(a)** Démontrer que $N \equiv a_0\ (3)$.

(b) En déduire un critère de divisibilité par 3 pour un nombre écrit en base 12.

2. **(a)** Démontrer que $N = a_n + \dots + a_0\ (11)$.

(b) En déduire un critère de divisibilité par 11 pour un nombre écrit en base 12.

3. Soit le nombre écrit en base 12 : $N = \overline{\beta 1 \alpha}$. Le nombre N est-il divisible par 3 ? par 11 ?

PGCD, théorème de Bézout, théorème de Gauss

I PGCD de deux nombres entiers

1. Diviseurs communs à deux entiers

Notation :

- Pour $a \in \mathbb{Z}$, on note $\mathrm{D}(a)$ l'ensemble des diviseurs de a.

  Par exemple $\mathrm{D}(12) =$ ____________________

- Pour $(a;b) \in \mathbb{Z}^2$, on note $\mathrm{D}(a;b)$ l'ensemble des diviseurs communs à a et b.

$$\mathrm{D}(a;b) = \mathrm{D}(a) \cap \mathrm{D}(b).$$

  Par exemple $\mathrm{D}(18) =$ ____________________

  donc $\mathrm{D}(12;18) =$ ____________________

Remarque :

- $\mathrm{D}(a;b) \subset \mathrm{D}(b)$ et $\mathrm{D}(a;b) \subset \mathrm{D}(a)$;
- $\mathrm{D}(0;b) = \mathrm{D}(b)$ car $\mathrm{D}(0) = \mathbb{Z}$;
- $\mathrm{D}(a;b) = \mathrm{D}(|a|;|b|)$;
- $\mathrm{D}(a;b) = \mathrm{D}(b;a)$;
- $\mathrm{D}(a;1) = \{-1;1\}$;
- Si $b \mid a$ alors $\mathrm{D}(a;b) = \mathrm{D}(b)$.

Propriété

- Soit $(a;b) \in \mathbb{Z}^2$. $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{D}(a;b) = \mathrm{D}(a-kb;b)$.
- Soit $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^*$ et r le reste de la division euclidienne de a par b alors $\mathrm{D}(a;b) = \mathrm{D}(b;r)$.

Démonstration : ____________________

____

____

□

2. Définition et propriété du PGCD

Propriété

Soit $(a\,;b)\in\mathbb{Z}^2$ tel que $(a\,;b)\neq(0\,;0)$. $\mathrm{D}(a\,;b)$ admet un plus grand élément.

Démonstration :

□

Définition

Soit $(a\,;b)\in\mathbb{Z}^2$ tel que $(a\,;b)\neq(0\,;0)$.
Le plus grand élément de $\mathrm{D}(a\,;b)$ est appelé le **PGCD** (plus grand commun diviseur) et est noté $\mathrm{PGCD}(a\,;b)$.

Exemple 1 :

Remarque :

- $\mathrm{PGCD}(0\,;b)=|b|$ $\rightsquigarrow$ $\mathrm{D}(0\,;b)=\mathrm{D}(b)$ car $\mathrm{D}(0)=\mathbb{Z}$;
- $\mathrm{PGCD}(a\,;b)=\mathrm{PGCD}(|a|\,;|b|)$ $\rightsquigarrow$ $\mathrm{D}(a\,;b)=\mathrm{D}(|a|\,;|b|)$;
- $\mathrm{PGCD}(a\,;b)=\mathrm{PGCD}(b\,;a)$ $\rightsquigarrow$ $\mathrm{D}(a\,;b)=\mathrm{D}(b\,;a)$;
- $\mathrm{PGCD}(a\,;1)=1$ $\rightsquigarrow$ $\mathrm{D}(a\,;1)=\{-1\,;1\}$;
- si $b\mid a$ alors $\mathrm{PGCD}(a\,;b)=|b|$ $\rightsquigarrow$ Si $b\mid a$ alors $\mathrm{D}(a\,;b)=\mathrm{D}(b)$.

Propriété — de réduction

Soit $(a;b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $(a;b) \neq (0;0)$.

- $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\text{PGCD}(a;b) = \text{PGCD}(a-kb;b)$.
- $\text{PGCD}(a;b) = \text{PGCD}(a-b;b)$.

Démonstration : ____________________

____

____________________ □

Propriété — Lemme d'Euclide

Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$.
Si r est le reste de la division euclidienne de a par b, alors $\text{PGCD}(a;b) = \text{PGCD}(b;r)$.

Démonstration : ____________________ □

3. Algorithme d'Euclide

Propriété

Soient $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$.
L'algorithme suivant permet en un nombre fini d'étapes de calculer le PGCD de a et b.

1. Calculer le reste r de la division euclidienne de a par b.

2. → Si $r = 0$, alors $\text{PGCD}(a;b) = b$;

→ si $r \neq 0$, remplacer a par b et b par r et revenir en **1.**

Le PGCD est :

- le dernier reste non nul si b ne divise pas a;
- b si $b \mid a$.

Démonstration :

	Div. Eucl.	**Reste**	**PGCD**
	$a = bq_0 + r_0$	$0 \leqslant r_0 < b$	$\text{PGCD}(a;b) = \text{PGCD}(\quad;\quad)$
			$= \text{PGCD}(\quad;\quad)$
			$= \text{PGCD}(\quad;\quad)$
⋮	⋮	⋮	⋮ ⋮
			$= \text{PGCD}(\quad;\quad)$
			$= \text{PGCD}(\quad;\quad)$
			$=$

____

□

Savoir-faire 12 **Déterminer** $\text{PGCD}(a\,;b)$ **à l'aide de l'algorithme d'Euclide**

Déterminer $\text{PGCD}(12\,458\,;3\,272)$ à l'aide de l'algorithme d'Euclide.

4. Autres propriétés

Propriété

Soit $(a\,;b)\in\mathbb{Z}^2$ tel que $(a\,;b)\neq(0\,;0)$.
L'ensemble de leurs diviseurs communs est l'ensemble des diviseurs de leur PGCD.

Démonstration :

□

Propriété (Homogénéité du PGCD)

Soit $(a\,;b)\in\mathbb{Z}^2$ tel que $(a\,;b)\neq(0\,;0)$.
Pour tout entier k non nul, $\text{PGCD}(ka\,;kb)=|k|\text{PGCD}(a\,;b)$.

Démonstration :

□

Exemple 2 : PGCD$(150\,;100) =$

5. Nombres premiers entre eux

Définition

Soit $(a\,;b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $(a\,;b) \neq (0\,;0)$.
Dire que a et b sont premiers entre eux signifie que PGCD$(a\,;b) = 1$.

Propriété

Soit $(a\,;b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $(a\,;b) \neq (0\,;0)$.
$d =$ PGCD$(a\,;b)$ si, et seulement si, il existe des nombres entiers relatifs a' et b' premiers entre eux tels que :

$$a = da' \quad \text{et} \quad b = db'.$$

Démonstration :

□

Remarque :

Savoir-faire 13 **Déterminer le PGCD de deux entiers**

Déterminer le PGCD de 5400 et 4200.

- **Avec l'algorithme d'Euclide :**

- **Avec l'homogénéité :**

Savoir-faire 14 **Utiliser les propriétés du PGCD**

Soient a et b deux entiers naturels tel que $a+b=72$ et $\text{PGCD}(a\,;b)=8$.
Déterminer les valeurs possibles de a et b.

II Théorème de Bézout et théorème de Gauss

1. Théorème de Bézout

Propriété — identité de Bézout

Soit $(a\,;b)\in\mathbb{Z}^2$ tel que $(a\,;b)\neq(0\,;0)$ et $d=\text{PGCD}(a\,;b)$.

- Il existe deux entiers u et v tels que $au+bv=d$ (identité de Bézout) ;
- l'ensemble des entiers $au+bv$ où u et v sont des entiers, est l'ensemble des multiples de d.

Démonstration :

□

Théorème **de Bézout**

Deux entiers a et b sont premiers entre eux si et seulement si il existe deux entiers u et v tels que $au+bv=1$.

Démonstration :

□

Exemple 1 :

- $a=4$ et $b=-9$
- Deux entiers consécutifs

Savoir-faire 15 **déterminer un couple $(u\,;v)$ du théorème de Bézout**

Dans chacun des cas suivants, justifier l'existence d'un couple $(u\,;v)$ d'entiers relatifs vérifiant l'égalité donnée, puis déterminer un tel couple :

1. $7u+17v=1$

2. $71u+19v=1$

Méthode

Pour trouver u et v tels que $au + bv = 1$, quand a et b sont premiers entre eux :

- l'exploration rapide des multiples de a et b peut permettre de conclure,
- sinon on écrit l'algorithme d'Euclide pour a et b et on exprime chaque reste en fonction de a et b jusqu'au dernier reste non nul qui est 1.

2. Théorème de Gauss

Théorème de Gauss

Soient a, b et c des entiers non nuls.
Si a divise bc et si a est premier avec b alors a divise c.

Démonstration :

□

Remarque : L'hypothèse a est premier avec b est indispensable. Par exemple,

Conséquences :

Propriété

Si deux entiers a et b, premiers entre eux, divisent un entier c, alors ab divise c.

Démonstration :

$\square$

Remarque : L'hypothèse a est premier avec b est indispensable. Par exemple,

Savoir-faire 16 **Déterminer tous les couples $(u\,;\,v)$ solutions de $au + bv = n$**

Justifier l'existence d'un couple d'entiers relatifs $(u\,;\,v)$ solution de l'équation $71u + 19v = 2$, puis déterminer tous les couples $(u\,;\,v)$ vérifiant cette égalité.

Méthode

Résolution d'une équation de la forme

$$(\mathrm{E}): \ au + bv = n$$

où a, b et n sont des entiers relatifs donnés, $(a\,;b) \neq (0\,;0)$ et u et v des entiers à déterminer.

Soit $d = \mathrm{PGCD}(a\,;b)$.

- Si n n'est pas multiple de d alors (E) n'a pas de solution.
- Si n est multiple de d, $n = kd$,
  - on simplifie l'équation par d pour obtenir l'équation (E') : $a'u + b'v = k$ où a' et b' sont premiers entre eux,
  - on détermine une solution particulière $(u_0\,;v_0)$,
  - on en déduit toutes les solutions en écrivant (E') sous la forme $a'(u - u_0) = b'(v_0 - v)$ et en utilisant le théorème de Gauss.

PGCD

1

Dans chacun des cas suivants, déterminer les diviseurs commun à a et b puis leur PGCD.

1. $a = 308$ et $b = 448$.

2. $a = 120$ et $b = 264$.

2

Déterminer $\text{PGCD}(3\,020, 2\,880)$.

3

Soit n un entier naturel tel que, quand on divise 169 et 367 par n, on obtient le même reste 15.

1. Démontrer que n est un diviseur commun à 154 et 352.

2. Déterminer n.

4

Quel est le plus grand entier n tel que, quand on divise 573 par n, on obtient pour reste 15 et quand on divise 683 par n, le reste est 1 ? Quel est le plus petit ?

5

Quels sont tous les entiers naturels n inférieurs à 100 tels que $\text{PGCD}(n, 72) = 8$?

6

On note d un diviseur des entiers naturels a et b non nuls.

1. Démontrer que d divise $4a + 3b$ et $5a + 4b$.

2. Réciproquement, démontrer que tout diviseur de $4a + 3b$ et $5a + 4b$ divise a et b.

3. En déduire que (a, b) et $(4a + 3b, 5a + 4b)$ ont le même PGCD.

7

n est un entier naturel non nul.

1. Vérifier que $(3n + 5) - 3(n + 2) = -1$.

2. En déduire $\text{PGCD}(3n + 5, n + 2)$.

8

n est un entier naturel non nul.

1. Démontrer que $\text{PGCD}(n, 3n + 7) = \text{PGCD}(n, 7)$.

2. Déterminer $\text{PGCD}(n, 3n + 7)$ lorsque n est un multiple de 7.

3. Déterminer $\text{PGCD}(n, 3n + 7)$ lorsque n n'est pas un multiple de 7.

9

n est un entier naturel non nul. $a = 2n + 15$ et $b = n + 3$.

1. Montrer que $\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(9, n + 3)$.

2. **(a)** Montrer que $\text{PGCD}(a, b) = 9$ si, et seulement si, $n \equiv 6\ (9)$.

(b) Montrer que $\text{PGCD}(a, b) = 3$ si, et seulement si, $n \equiv 0\ (9)$ ou $n \equiv 3\ (9)$.

(c) Déterminer les valeurs de n telles que $\text{PGCD}(a, b) = 1$.

10

a et b sont deux entiers naturels non nuls. On pose $\text{A} = 5a + 9b$ et $\text{B} = 4a + 7b$.
Montrer deux manières différentes que $\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(\text{A}, \text{B})$.

11

Calculer à l'aide de l'algorithme d'Euclide $\text{PGCD}(a, b)$.

1. $a = 455$ et $b = 312$.

2. $a = 276$ et $b = 978$.

3. $a = 1\,938$ et $b = 589$.

4. $a = 2\,0022015$.

12

1. Montrer que $2^{21} = 2^{12} \times 2^{9}$.

2. En déduire que $2^{21} - 1 = \left(2^{12} - 1\right) \times 2^{9} + 2^{9} - 1$.

3. En déduire que $\text{PGCD}\left(2^{21} - 1, 2^{12} - 1\right) = \text{PGCD}\left(2^{12} - 1, 2^{9} - 1\right)$.

4. Recommencer et en déduire à l'aide de l'algorithme d'Euclide, le $\text{PGCD}(a, b)$ pour $a = 2^{21} - 1$ et $b = 2^{12} - 1$.

13

L'application de l'algorithme d'Euclide aux entiers a et b a donné lieu à l'écriture suivante :

$$a = b \times 4 + \ldots$$

$$\ldots = \ldots \times 2 + \ldots$$

$$6 = \ldots \times 2$$

Calculer a et b.

14

m et n sont deux entiers naturels non nuls.

1. Montrer que $\text{PGCD}(m, 3m + 1) = 1$.

2. En déduire $\text{PGCD}(mn, n(3m + 1))$.

Nombres premiers entre eux

15

Soient a et b des entiers naturels. On pose $\text{A} = 2a + 5b$ et $\text{B} = 3a + 7b$.

1. Montrer que si d divise a et b, d divise A et B.

2. Vérifier que $3\text{A} - 2\text{B} = b$.

3. Trouver de même une relation donnant a en fonction de A et B.

4. Montrer que d divise A et B alors d divise a et b.

5. Montrer que a et b sont premiers entre eux si, et seulement si, A et B le sont aussi.

16

n est un entier naturel.

1. Montrer que $3n+2$ et $6n+5$ sont premiers entre eux.

2. En déduire que la fraction $\dfrac{3n+2}{6n+5}$ est irréductible.

17

n est un entier naturel. Démontrer que $\dfrac{9n+5}{7n+4}$ est irréductible.

18

Déterminer tous les couples d'entiers relatifs (a,b) tels que $\mathrm{PGCD}(a,b)=14$ et $ab=10780$.

19

Soit n un entier naturel supérieur à 2.

1. Montrer que $\mathrm{PGCD}(n+10,n-2)=\mathrm{PGCD}(n-2,12)$.

2. Déterminer les valeurs possibles de $\mathrm{PGCD}(n+10,n-2)$.

3. Si $\mathrm{PGCD}(n+10,n-2)=12$, quelles sont les valeurs possibles pour n ?

4. Pour quelles valeurs de n la fraction $\dfrac{n+10}{n-2}$ est-elle irréductible ?

20

1. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $3n^3-11n+48=(n+3)\left(3n^2-9n+16\right)$.

(b) Montrer que, pour tout entier naturel n, $3n^2-9n+16$ est un entier naturel non nul.

2. Montrer que, pour tous les entiers naturels non nuls a, b et c, l'égalité suivante est vraie :

$$\mathrm{PGCD}(a,b)=\mathrm{PGCD}(bc-a,b).$$

3. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, l'égalité suivante est vraie :

$$\mathrm{PGCD}\left(3n^3-11n,n+3\right)=\mathrm{PGCD}(48,n+3).$$

4. (a) Déterminer l'ensemble des diviseurs entiers naturels de 48.

(b) En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que $\dfrac{3n^3-11n}{n+3}$ soit un entier naturel.

Théorème de Bezout

21

Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier $2(5n+3)-5(2n+1)$. En déduire que $5n+3$ et $2n+1$ sont premiers entre eux.

22

n est un entier naturel. Démontrer en utilisant le théorème de Bezout que les entiers suivants sont premiers entre eux.

1. $-n+1$ et $3n-2$;

2. $6n+3$ et $3n+1$;

3. $2n-1$ et $-7n+3$.

23

Sans les résoudre, déterminer si les équations suivantes ont des solutions :

1. $5x+17y=1$;

2. $6x-8y=5$;

3. $3x-4y=10$;

4. $21x-56y=14$.

24

Déterminer un couple d'entiers $(x;y)$ tel que $83x+48y=1$.

25

1. Déterminer un couple d'entiers $(x;y)$ tel que

$$936x+275y=1.$$

2. En déduire un couple $(x;y)$ d'entiers solution de l'équation $936x+y275y=3$.

26

Soient $a=155$ et $b=65$.

1. À l'aide de l'algorithme d'Euclide, déterminer $\mathrm{PGCD}(a,b)$.

2. En déduire un couple d'entiers $(x;y)$ tel que

$$\mathrm{PGCD}(a,b)=ax+by.$$

27

Après en avoir justifié l'existence, trouver pour chacune des équations suivantes deux entiers x et y solutions à l'aide de l'algorithme d'Euclide.

1. $3^7x-7^3y=1$;

2. $5^{10}x-2^{10}y=1$.

28

Existe-t-il un entier n tel que $\dfrac{n-6}{15}$ et $\dfrac{n-5}{12}$ soient tous les deux des entiers ?

29

Soit p et q deux entiers naturels non nuls.

Montrer qu'il existe deux entiers a et b tels que $\dfrac{1}{pq}=\dfrac{a}{p}+\dfrac{1}{q}$ si, et seulement si, p et q sont premiers entre eux.

30

1. Montrer que, pour tout entier naturel non nul k et pour tout entier naturel x :

$$(x-1)\left(1+x+x^2+\cdots+x^{k-1}\right)=x^k-1.$$

Dans toute la suite de l'exercice, on considère un nombre entier a supérieur ou égal à 2.

2. (a) Soit n un entier naturel non nul et d un diviseur positif de n : $n=dk$.
Montrer que a^d-1 est un diviseur de a^n-1.

(b) Déduire de la question précédente que $2^{2004}-1$ est divisible par 7, par 63 puis par 9.

3. Soient m et n deux entiers naturels non nuls et d leur pgcd.
(a) On définit m' et n' par $m=dm'$ et $n=dn'$. En appliquant le théorème de Bezout à m' et n', montrer qu'il existe des entiers relatifs u et v tels que : $mu-nv=d$.

(b) On suppose u et v strictement positifs.
Montrer que : $\left(a^{mu}-1\right)-\left(a^{nv}-1\right)a^d = a^d - 1$.
Montrer ensuite que a^d-1 est le pgcd de $a^{mu}-1$ et de $a^{nv}-1$.

(c) Calculer, en utilisant le résultat précédent, le pgcd de $2^{63}-1$ et de $2^{60}-1$.

Théorème de Gauss

31

Il s'agit de trouver tous les couples d'entiers $(x;y)$ tels que $5x=7y$.

1. On suppose qu'il existe des entiers x et y tels que $5x=7y$, en déduire à l'aide du théorème de Gauss que 7 divise x et qu'il existe des entiers k et k' tel que $y=5k$ et $x=7k'$.

2. Étudier la réciproque et conclure.

32

Utiliser le théorème de Gauss pour résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation $4(x-2)=5(y-3)$.

33

Déterminer les entiers m et n tels que :

1. $63m=91n$;

2. $208m=390n$.

34

Déterminer tous les entiers n tels que, quand on divise n par 60 et par 156, le reste soit égal à 15.

35

Trouver tous les entiers x et y tels que $\text{PGCD}(x,y)=21$ et $99x-165y=0$.

36

Soit n un entier naturel. On pose $a=n(n+7)(n+11)$. Montrer que a est divisible par 2 et 3, puis par 6.

37

1. On se propose, dans cette question, de déterminer tous les entiers relatifs N tels que

$$\left\{\begin{array}{lll} \mathrm{N} & \equiv & 5 \quad (13) \\ \mathrm{N} & \equiv & 1 \quad (17) \end{array}\right.$$

(a) Vérifier que 239 est solution de ce système.

(b) Soit N un entier relatif solution de ce système.
Démontrer que N peut s'écrire sous la forme $\mathrm{N}=1+17x=5+13y$ où x et y sont deux entiers relatifs vérifiant la relation $17x-13y=4$.

(c) Résoudre l'équation $17x-13y=4$ où x et y sont des entiers relatifs.

(d) En déduire si N est solution du système alors $\mathrm{N}=18+221k$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

2. Démontrer l'équivalence entre $\mathrm{N}\equiv 18 \ (221)$ et $\left\{\begin{array}{lll} \mathrm{N} & \equiv & 5 \quad (13) \\ \mathrm{N} & \equiv & 1 \quad (17) \end{array}\right.$.

38

On se propose de déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des entiers relatifs n vérifiant le système :

$$\left\{\begin{array}{lll} n & \equiv & 9 \quad [17] \\ n & \equiv & 3 \quad [5] \end{array}\right.$$

1. Recherche d'un élément de $\mathcal{S}$.
On désigne par $(u\ ;\ v)$ un couple d'entiers relatifs tel que $17u+5v=1$.

(a) Justifier l'existence d'un tel couple $(u\ ;\ v)$.

(b) On pose $n_0=3\times 17u+9\times 5v$.
Démontrer que n_0 appartient à $\mathcal{S}$.

(c) Donner un exemple d'entier n_0 appartenant à $\mathcal{S}$.

2. Caractérisation des éléments de $\mathcal{S}$.

(a) Soit n un entier relatif appartenant à $\mathcal{S}$.
Démontrer que $n-n_0\equiv 0 \quad [85]$.

(b) En déduire qu'un entier relatif n appartient à $\mathcal{S}$ si et seulement si il peut s'écrire sous la forme $n=43+85k$ où k est un entier relatif.

3. Application :
Zoé sait qu'elle a entre 300 et 400 jetons.
Si elle fait des tas de 17 jetons, il lui en reste 9.
Si elle fait des tas de 5 jetons, il lui en reste 3.
Combien a-t-elle de jetons ?

39

On considère la suite d'entiers (a_n) où a_n est le nombre dont l'écriture décimale est constituée de n 1 :

$$a_n = \underbrace{\overline{11\dots11}}_{n \text{ chiffres}}.$$

On se propose de montrer que l'un, au moins, des termes de la suite est divisible par 2013.

1. En écrivant a_n sous la forme d'une somme de puissances de 10, montrer que pour tout entier naturel n non nul, $9a_n=10^n-1$.

2. **(a)** Expliquer pourquoi, dans la division euclidienne par 2013, parmi les 2014 premiers termes de la suite, il en existe au moins deux qui ont le même reste.

(b) Soit a_n et a_p deux termes de la suite admettant le même reste ($n<p$).
Quel est le reste de la division euclidienne de a_p-a_n par 2013 ?

3. Soient k et m deux entiers strictement positifs vérifiant $k<m$. Démontrer l'égalité $a_m-a_k=a_{m-k}\times 10^k$.

4. Déterminer $\text{PGCD}(2013,10)$ et montrer que si 2013 divise a_m-a_k, alors 2013 divise a_{m-k}.

5. Démontrer alors que l'un, au moins, des termes de la suite est divisible par 2013.

6. Écrire un algorithme permettant de trouver le rang n tel que a_n soit divisible par 2013 (on pourra remarquer que $a_{n+1}=10a_n+1$).

Équation $ax + by = c$

40

1. Justifier l'existence d'un couple d'entiers solution de l'équation $9x - 14y = 1$.

2. En déduire l'existence d'un couple d'entiers solution de l'équation $9x - 14y = 11$.

3. Justifier l'existence d'un couple d'entiers solution de l'équation $18x - 28y = 6$.

4. Que penser de l'équation $18x - 28y = 3$?

41

Déterminer, s'il existe, un couple d'entiers solution pour chacune des équations suivantes :

1. $9x + 11y = 1$;

2. $7x + 12y = 3$;

3. $18x + 15y = 6$;

4. $18x + 15y = 8$.

42

1. Justifier qu'il existe des entiers x et y tels que $18x - 35y = 1$.

2. Trouver un couple d'entiers solution de $18x - 35y = 1$. On les notera dans la suite x_0 et y_0.

3. (a) Montrer que $(x; y)$ est solution de $18x - 35y = 1$ si, et seulement si, $18(x - x_0) = 35(y - y_0)$.

(b) Justifier qu'il existe deux entiers k et k' tels que $x - x_0 = 35k$ et $y - y_0 = 18k'$.

(c) Parmi les couples $(x; y) = (x_0 + 35k; y_0 + 18k')$, $k \in \mathbb{Z}$, $k' \in \mathbb{Z}$, quels sont ceux qui sont solutions de l'équation $18x - 35y = 1$?

43

Soit l'équation (E) $4x - 3y = 2$.

1. Déterminer une solution évidente $(x_0; y_0)$ de l'équation (E).

2. Démontrer qu'un couple $(x; y)$ est solution de l'équation (E) si, et seulement si, $4(x - x_0) = 5(y - y_0)$.

3. En déduire tous les couples d'entiers solution de l'équation (E).

44

x et y désignent des entiers relatifs.

1. Montrer que l'équation

$$\text{(E)} \qquad 65x - 40y = 1$$

n'a pas de solution.

2. Montrer que l'équation

$$\text{(E}'\text{)} \qquad 17x - 40y = 1$$

admet au moins une solution.

(a) Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (E').

(b) Résoudre l'équation (E').

(c) En déduire qu'il existe un unique naturel x_0 inférieur à 40 tel que

$17x_0 \equiv 1 \quad [40]$.

3. Pour tout entier naturel a, démontrer que si $a^{17} \equiv b \quad [55]$ et si $a^{40} \equiv 1 \quad [55]$, alors $b^{33} \equiv a \quad [55]$.

45

1. On considère l'équation (E) : $8x + 5y = 1$, où $(x ; y)$ est un couple de nombres entiers relatifs.

(a) Donner une solution particulière de l'équation (E).

(b) Résoudre l'équation (E).

2. Soit N un nombre naturel tel qu'il existe un couple $(a ; b)$ de nombres entiers vérifiant : $\begin{cases} N = 8a + 1 \\ N = 5b + 2. \end{cases}$

(a) Montrer que le couple $(a ; b)$ est solution de (E).

(b) Quel est le reste, dans la division de N par 40 ?

3. (a) Résoudre l'équation $8x + 5y = 100$, où $(x ; y)$ est un couple de nombres entiers relatifs.

(b) Au VIIIe siècle, un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie dans une auberge. Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune. Combien pouvait-il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe ?

46

1. On considère x et y des entiers relatifs et l'équation (E) $91x + 10y = 1$.

(a) Énoncer un théorème permettant de justifier l'existence d'une solution à l'équation (E).

(b) Déterminer une solution particulière de (E) et en déduire une solution particulière de l'équation (E′) $91x + 10y = 412$.

(c) Résoudre (E′).

2. Montrer que les nombres entiers $A_n = 3^{2n} - 1$, où n est un entier naturel non nul, sont divisibles par 8. (Une des méthodes possibles est un raisonnement par récurrence).

3. On considère l'équation (E″) $A_3 x + A_2 y = 3296$.

(a) Déterminer les couples d'entiers relatifs (x, y) solutions de l'équation (E″).

(b) Montrer que (E″) admet pour solution un couple unique d'entiers naturels.
Le déterminer.

47

Partie A

On considère l'équation (E) : $11x - 26y = 1$, où x et y désignent deux nombres entiers relatifs.

1. Vérifier que le couple $(-7 ; -3)$ est solution de (E).

2. Résoudre alors l'équation (E).

3. En déduire le couple d'entiers relatifs $(u ; v)$ solution de (E) tel que $0 \leqslant u \leqslant 25$.

Partie B

On assimile chaque lettre de l'alphabet à un nombre entier comme l'indique le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On « code » tout nombre entier x compris entre 0 et 25 de la façon suivante :

- on calcule $11x+8$
- on calcule le reste de la division euclidienne de $11x+8$ par 26, que l'on appelle y.

x est alors « codé » par y.

Ainsi, par exemple, la lettre L est assimilée au nombre 11 ; $11 \times 11 + 8 = 129$ or $129 \equiv 25 \quad (26)$; 25 est le reste de la division euclidienne de 129 par 26. Au nombre 25 correspond la lettre Z.
La lettre L est donc codée par la lettre Z.

1. Coder la lettre W.

2. Le but de cette question est de déterminer la fonction de décodage.

(a) Montrer que pour tous nombres entiers relatifs x et j, on a :

$$11x \equiv j \quad (26) \text{ équivaut à } x \equiv 19j \quad (26).$$

(b) En déduire un procédé de décodage.

(c) Décoder la lettre W.

Chapitre 3

Nombres premiers

I Généralités

Définition

- Un nombre entier naturel p est premier s'il possède exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui même.
- Un entier supérieur à 2 qui n'est pas premier et dit composé.

Exemple 1 :

-
-
-
-

Remarque :

-
-

Théorème

- Tout entier naturel supérieur ou égal à 2 admet un diviseur premier.
- Tout entier composé n admet un diviseur premier p inférieur ou égal à $\sqrt{n}$.

Démonstration :

-
-

Propriété — un test de primalité

Soit n un entier supérieur à 2. Si n n'est divisible par aucun des nombres premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{n}$ alors n est un nombre premier.

Exemple 2 :

Théorème

Il existe une infinité de nombres premiers.

Démonstration :

□

II Décomposition en facteurs premiers

Théorème

Tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 se décompose en un produit de nombres premiers. Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.
On écrira $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ où $n \geqslant 2$, $p_1, p_2, \dots, p_k$ sont des nombres premiers distincts et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ sont des entiers naturels non nuls.

Démonstration :

- **Existence :**

- **Unicité :** □

Théorème

Si l'entier naturel n, supérieur ou égal à 2, admet pour décomposition en produit de facteurs premiers $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, les diviseurs positifs de n sont les entiers $p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_k^{r_k}$ où r_1, r_2, …, r_k sont des entiers tels que $0 \leqslant r_i \leqslant \alpha_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant k$.

Exemple 1 :

Propriété

Si un entier n, $n \geqslant 2$, admet la décomposition en produit de facteurs premiers $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, alors n admet $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$ diviseurs positifs.

Propriété

Soient a et b deux entiers supérieurs ou égaux à 2.
S'ils n'ont pas de facteur premier commun, $\text{PGCD}(a; b) = 1$.
Sinon, $\text{PGCD}(a; b)$ est égal au produit des facteurs premiers communs au deux nombres, chacun étant affecté du plus petit exposant avec lequel il figure dans leurs deux décompositions.

Exemple 2 : $1\,008 = 2^4 \times 3^2 \times 7$ et $540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$

Remarque :

Savoir-faire 17 **Décomposer un entier en produit de facteurs premiers**

Décomposer $11\,400$ en produit de facteurs premiers.

Savoir-faire 18 **Calcul du PGCD et du PPCM**

Déterminer le PGCD et le PPCM des entiers $13\,734$ et $91\,260$.

Nombres premiers, décomposition

1

Soit n un entier naturel $n > 2$ et $N = (n-2)\left(n^2+4\right)$. N peut-il être premier ?

2

Soient a et b deux entiers naturels. $a^2 - b^2$ peut-il être premier ?

3

Déterminer tous les diviseurs positifs de 3^9. Quelle est leur somme ?

4

Soit p premier tel que $p > 2$. On sait que $2x \equiv 0\ (p)$ et que $x < p^2$. Quelles sont les valeurs possibles de x ?

5

1. Déterminer tous les diviseurs positifs de $a = 2^4 \times 3^2$ et $b = 3^2 \times 5^3$.

2. Déterminer $\mathrm{PGCD}(a\,;b)$ et $\mathrm{PPCM}(a\,;b)$.

6

1. Quel est le nombre de diviseurs de 25, 250, $2\,500$, $25\,000$?

2. Soit p_n le nombre entier $250\ldots0$ dont l'écriture décimale se termine par n zéros.
(a) Quel est le nombre de diviseurs de p_n ?

(b) Pour quelles valeurs de n, p_n a-t-il au plus $1\,000$ diviseurs ?

7

Soient p et q deux nombres premiers distincts. On pose $a = p^3 \times q^4$ et $b = p \times q^6$.
1. Écrire la fraction $\dfrac{a}{b}$ sous forme irréductible.

2. Écrire $\dfrac{b}{a} + \dfrac{a}{b}$ sous forme irréductible.

8

Soient a et b deux entiers tels que $a + b = 1\,125$ et $a < b$. On note $d = \mathrm{PGCD}(a\,;b)$.
1. Justifier qu'il existe n et m tels que $d = 3^n \times 5^m$.

2. Sachant que a et b ont 6 diviseurs communs et que $d < 50$, déterminer les valeurs possibles pour a et b.

3. Quelles conditions rajouter pour que le couple cherché soit unique ?

9

1. Montrer, en utilisant les congruences que pour tout entier naturel k, $2^{2k+1} + 1$ est multiple de 3.
En déduire que si m est un entier naturel impair, $2^m + 1$ est composé.

2. Montrer que si m admet un diviseur impair p, $2^m + 1$ est divisible par $2^q + 1$, où $m = pq$.

3. En déduire que si $2^k + 1$ est premier, alors $k = 2^m$.

10

1. Démontrer que tout nombre premier différent de 2 est congru à 1 ou -1 modulo 4.

2. Démontrer que si un entier est congru à -1 modulo 4, il en est de même de l'un au moins de ses facteurs premiers.

11

On rappelle la propriété, connue sous le nom de petit théorème de Fermat : « soit p un nombre premier et a un entier naturel premier avec p ; alors $a^{p-1} - 1$ est divisible par p ».

1. Soit p un nombre premier impair.

(a) Montrer qu'il existe un entier naturel k, non nul, tel que $2^k \equiv 1\ [p]$.

(b) Soit k un entier naturel non nul tel que $2^k \equiv 1\ [p]$ et soit n un entier naturel. Montrer que, si k divise n, alors $2^n \equiv 1\ [p]$.

(c) Soit b tel que $2^b \equiv 1\ [p]$, b étant le plus petit entier non nul vérifiant cette propriété.
Montrer, en utilisant la division euclidienne de n par b, que si $2^n \equiv 1\ [p]$, alors b divise n.

2. Soit q un nombre premier impair et le nombre $A = 2^q - 1$.
On prend pour p un facteur premier de A.

(a) Justifier que : $2^q \equiv 1\ [p]$.

(b) Montrer que p est impair.

(c) Soit b tel que $2^b \equiv 1\ [p]$, b étant le plus petit entier non nul vérifiant cette propriété.
Montrer, en utilisant **1.** que b divise q. En déduire que $b = q$.

(d) Montrer que q divise $p-1$, puis montrer que $p \equiv 1\ [2q]$.

3. Soit $A_1 = 2^{17} - 1$. Voici la liste des nombres premiers inférieurs à 400 et qui sont de la forme $34m + 1$, avec m entier non nul : 103, 137, 239, 307. En déduire que A_1 est premier.

12

Soit (E) l'ensemble des entiers naturels écrits, en base 10, sous la forme $\overline{abba}$ où a est un chiffre supérieur ou égal à 2 et b est un chiffre quelconque.
Exemples d'éléments de (E) : 2 002 ; 3 773 ; 9 119. Les parties A et B peuvent être traitées séparément.

Partie A : Nombre d'éléments de (E) ayant 11 comme plus petit facteur premier.

1. (a) Décomposer 1 001 en produit de facteurs premiers.

(b) Montrer que tout élément de (E) est divisible par 11.

2. (a) Quel est le nombre d'éléments de (E) ?

(b) Quel est le nombre d'éléments de (E) qui ne sont ni divisibles par 2 ni par 5 ?

3. Soit n un élément de (E) s'écrivant sous la forme $\overline{abba}$.

(a) Montrer que : « n est divisible par 3 » équivaut à « $a + b$ est divisible par 3 ».

(b) Montrer que : « n est divisible par 7 » équivaut à « b est divisible par 7 ».

4. Déduire des questions précédentes le nombre d'éléments de (E) qui admettent 11 comme plus petit facteur premier.

Partie B : Étude des éléments de (E) correspondant à une année bissextile.

Soit (F) l'ensemble des éléments de (E) qui correspondent à une année bissextile.

On admet que pour tout élément n de (F), il existe des entiers naturels p et q tels que :

$$n = 2000 + 4p \quad \text{et} \quad n = 2002 + 11q.$$

1. On considère l'équation (e) : $4p - 11q = 2$ où p et q sont des entiers relatifs.

Vérifier que le couple $(6,2)$ est solution de l'équation (e) puis résoudre l'équation (e).

2. En déduire que tout entier n de (F) peut s'écrire sous la forme $2024 + 44k$ où k est un entier relatif.

3. À l'aide de la calculatrice déterminer les six plus petits éléments de (F).

N.B. : Liste des nombres premiers inférieurs à 40 :

2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37.

13

On dit qu'un entier naturel est parfait s'il est égal à la somme des ses diviseurs positifs propres (c'est à dire autres que lui-même).

Partie A

1. (a) Vérifier que 6 et 28 sont parfaits.

(b) Vérifier que ces deux nombres peuvent s'écrire sous la forme $2^n\left(2^{n+1}-1\right)$ où $2^{n+1}-1$ est premier.

2. Nous allons montrer que tout nombre de cette forme est parfait.

(a) Soit p un nombre premier et a le nombre $a = 2^n p$.

Quels sont ses diviseurs propres ? Calculer leur somme en fonction de n et p.

(b) Supposons de plus que $p = 2^{n+1} - 1$.

Exprimer la somme des diviseurs propres de $a = 2^n\left(2^{n+1}-1\right)$ en fonction de n.

(c) En déduire que a est parfait.

3. Énoncer le résultat démontré. Donner deux autres nombres parfaits.

Partie B

1. Soit a un entier naturel pair.

Montrer que l'on peut écrire a sous la forme $2^n b$ où b est impair.

2. On note $s(a)$ la somme de tous les diviseurs positifs de a.

(a) Montrer que $s(a) = \left(2^{n+1}-1\right)s(b)$. (On pourra noter $d_1, d_2, \ldots, d_p$ les diviseurs de b et exprimer les diviseurs de a en fonction de ceux de b).

(b) À quelle condition sur $s(a)$, a est-il un nombre parfait ?

3. (a) Montrer que la condition précédente est équivalente à :

$$b = (s(b) - b)\left(2^{n+1}-1\right).$$

(b) En déduire que $s(b) - b$ est un diviseur de b.

(c) De $s(b) = b + (s(b) - b)$, en déduire que b est premier puis que $b = 2^{n+1} - 1$.

(d) Conclure.