Repérage, Vecteurs

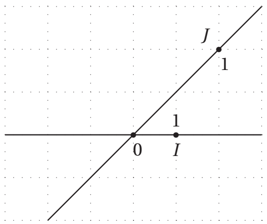
I Repérage

1. Coordonnées dans le plan

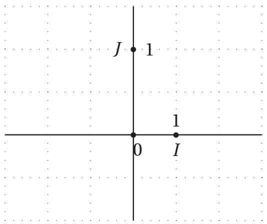
Définition

Définir un repère du plan, c'est choisir 3 points non alignés dans un ordre précis : O, I et J.
On note ce repère (O, I, J), et :

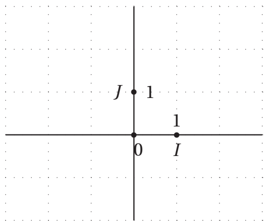
- le point O est l'origine du repère ;
- la droite (OI) est l'axe des abscisses et le point I donne l'unité sur cet axe ;
- la droite (OJ) est l'axe des ordonnées et le point J donne l'unité sur cet axe.



repère quelconque

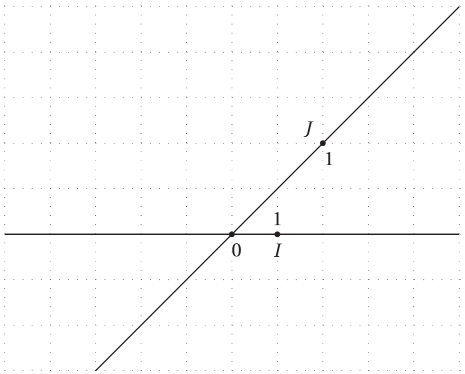


repère orthogonal



repère orthonormal

Exemple :



Seconde Repérage, Vecteurs

2. Calcul de distances dans un repère orthonormé

Propriété

On considère dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) les points $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$.
La distance entre les points A et B est :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2},$$

l'unité de longueur étant l'unité commune aux deux axes.

Démonstration :
On raisonne dans le cas où $x_A < x_B$ et $y_A < y_B$.

□

Exemple : Si on a $A(2 ; -1)$ et $B(-4 ; 7)$ dans un repère orthonormé, alors $AB =$

II Vecteurs

1. Translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$

Définition

Soient A et B deux points du plan.
La translation, noté $t_{\overrightarrow{AB}}$, qui, au point A, associe le point $B = t_{\overrightarrow{AB}}(A)$ associe à tout point M du plan l'unique point $M' = t_{\overrightarrow{AB}}(M)$ tel $ABM'M$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).

1$^{\text{er}}$ cas : $M \notin (AB)$

2$^{\text{e}}$ cas : $M \in (AB)$

Remarque :

- Dans le cas où A et B sont confondus, $t_{\overrightarrow{AB}}$ est appelée l'identité, *i.e.* l'application qui laisse invariant tout point du plan : $t_{\overrightarrow{AB}}(A) = A$, $t_{\overrightarrow{AB}}(M) = M$ ...
- Lorsque A et B ne sont pas confondus la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$ est caractérisée par
  - ____________________
  - ____________________
  - ____________________

Définition

À toute translation on associe un objet mathématique appelé vecteur qui est noté à l'aide de deux ou d'une lettre surmontée d'une flèche. Par exemple :

- $t_{\overrightarrow{AB}}$ est appelée la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$,
- $t_{\vec{u}}$ est appelée la translation de vecteur $\vec{u}$.

- Si $t_{\overrightarrow{AB}}$ n'est pas l'identité, $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par
  - une direction (la droite (AB)) ;
  - un sens (celui de A vers B) ;
  - une longueur AB (aussi appelée norme que l'on note $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$).
- Si $t_{\overrightarrow{AB}}$ est l'identité on lui associe le vecteur dit nul que l'on note $\vec{0}$. $\vec{0}$ n'a pas de direction, ni de sens, sa norme est égale à zéro : $\|\vec{0}\| = 0$.

Exemple :

2. Égalité de deux vecteurs

Définition — Vecteurs égaux

- Si $t_{\overrightarrow{AB}} = t_{\overrightarrow{CD}}$ alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont deux représentants d'un même vecteur.
- Notation : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
- Si de plus $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ signifie que ces vecteurs ont même direction, même sens, même norme.
- D'une manière général, deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont égaux lorsqu'ils ont même direction, même sens, même norme.

Propriété

$ABDC$ est un parallélogramme si, et seulement si, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

3. Somme de deux vecteurs

Définition — Composée de deux translations

On appelle composée de la translations $t_{\vec{u}}$ par $t_{\vec{v}}$ l'application noté $t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}$ qui à tout point M du plan associe le point $M'' = t_{\vec{v}}\big(t_{\vec{u}}(M)\big)$.

$$M \overset{t_{\vec{u}}}{\mapsto} M' \overset{t_{\vec{v}}}{\mapsto} M''$$

On admet que la composée de deux translations est une translation.

Soit $t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{v}}$ deux translations auxquelles sont associés les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. D'après ce qui précède $t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}$ est une translation à laquelle on peut associer un vecteur $\vec{w}$: $t_{\vec{w}} = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}$

Définition — Somme de vecteurs

La somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est égale au vecteur associé à la translation $t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}$.
Si $t_{\vec{w}} = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}$ alors $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.

Exemple :

1. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs, construisons un représentant du vecteur $\vec{w}$ tel que $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$.
2. ABC est un triangle, construisons le point M tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

4. Commutativité de la somme

Proposition — commutativité de la somme

On admet que

$$t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}.$$

On a :

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}.$$

5. Vecteur opposé

La composée d'une translation et de sa réciproque donne l'identité.

Par exemple :

Définition — vecteur opposé

- Si $t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{0}}$ alors $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$. $\vec{v}$ est le vecteur opposé à $\vec{u}$.
- On note $\vec{v} = -\vec{u}$. $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$.

Remarque : Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, $-\vec{u}$ possède la même direction et la même norme que $\vec{u}$ mais un sens contraire à celui de $\vec{u}$.

6. Différence de deux vecteurs

On considère la composée $t_{\vec{u}} \circ t_{-\vec{v}} = t_{\vec{w}}$. On note

7. Relation de Chasles

Soient A et B deux points du plan.

Pour tout point M,

Exemple :

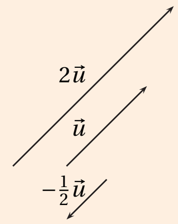
III Vecteurs colinéaires

1. Multiplication d'un vecteur par un nombre

Définition

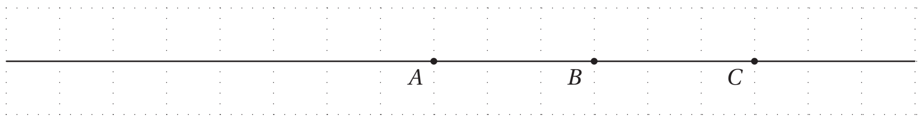
Soit $\vec{u}$ un vecteur et k un réel, $k\vec{u}$ désigne un vecteur et

- Si $k=0$ ou si $\vec{u}=\vec{0}$ alors $k\vec{u}=\vec{0}$;
- Si $k \neq 0$ et si $\vec{u} \neq \vec{0}$ alors $k\vec{u}$ a pour caractéristiques :
  - la même direction que $\vec{u}$;
  - - le même sens que $\vec{u}$ lorsque $k>0$;
    - le sens contraire de $\vec{u}$ lorsque $k<0$;
  - $||k\vec{u}|| = |k| \times ||\vec{u}||$.



Exemple :

1.

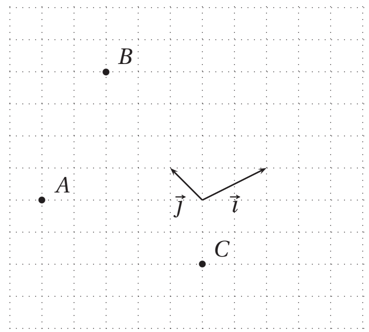


(a) Compléter : $\overrightarrow{AC} = \ldots \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA} = \ldots \overrightarrow{AC}$.

(b) Placer les points D et E tels que : $\overrightarrow{AD} = -2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE} = \dfrac{5}{3}\overrightarrow{BA}$.

2. Placer les points D, E et F tels que :

- $\overrightarrow{AD} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$;
- $\overrightarrow{BE} = 2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}$;
- $\overrightarrow{CF} = -\dfrac{3}{2}\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$.



2. Règles de calcul

Propriété

Pour tous réels k et k' et pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$k(\vec{u}+\vec{v}) = k\vec{u}+k\vec{v}$ $\quad$ $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$ $\quad$ $(k+k')\vec{u} = k\vec{u}+k'\vec{u}$

Exemple : Exprimer le plus simplement possible, en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, les vecteurs suivants :

- $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC}$
- $\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} - 2\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BA}\right)\right)$

3. Vecteurs colinéaires

Définition

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires lorsque l'un est le produit de l'autre par un réel, *i.e.* il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$ ou $\vec{u} = k\vec{v}$.

Remarque :

- deux vecteurs non nuls sont colinéaires si, et seulement si, ils ont la même direction.
- D'après la définition, le vecteur nul est colinéaires à tous les vecteurs.

Exemple : $\vec{u} = 3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AC}$ et $\vec{v} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CA}$. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?

Théorème

- Les points A, B et C sont alignés équivaut à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
- Les droites (AB) et (CD) sont parallèles équivaut à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Exemple :

1. A, B, C, D, E, F, G et H sont des points du plan tels que :
$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CH} = -\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CG} = -\overrightarrow{CD}$
Exprimer $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ puis en déduire que les droites (EF) et (GH) sont parallèles.

2. ABC est un triangle, I et J sont deux points tels que : $\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $3\overrightarrow{CJ} = 2\overrightarrow{CB}$.
Montrer que $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Que peut-on en déduire ?

IV Coordonnées d'un vecteur dans un repère

1. Repère du plan défini à l'aide de vecteurs

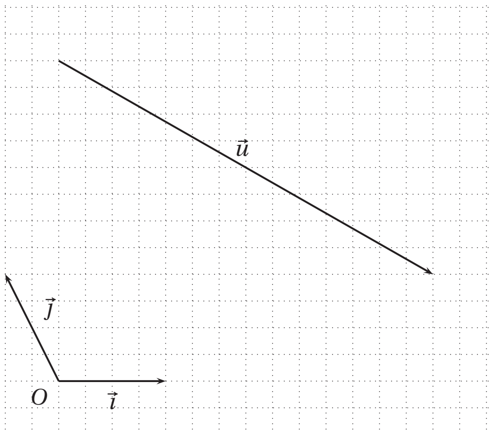
Définition

Un **repère** $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ du plan est formé d'un point O, appelé **origine** du repère, et de deux vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ non colinéaires.

- Lorsque les directions des vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont **perpendiculaires**, on dit que le repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ est **orthogonal**.
- Lorsque, de plus, les normes des vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont égales, on dit que le repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ est **orthonormé**.

repère quelconque | repère orthogonal | repère orthonormé

2. Coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$



Soient $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ deux vecteurs **non colinéaires** du plan. Tout vecteur $\vec{u}$ du plan peut s'exprimer comme combinaison des vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$, et ceci de manière unique.

Par exemple, ici, on a $\vec{u} = \_\_\_\_\vec{\imath} + \_\_\_\_\vec{\jmath}$

Théorème et définition

Dans un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ tout vecteur $\vec{u}$ du plan se décompose de manière unique sous la forme $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ où $(x;y)$ est un couple de nombres réels.

On dira que le vecteur $\vec{u}$ a pour **coordonnées** x et y dans le repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$. On notera $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

Exemple :
Si $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ est un repère du plan, alors :

- $\vec{u} = 5\vec{\imath} - \vec{\jmath} \Longleftrightarrow \vec{u}\begin{pmatrix}\_\_\_\\\_\_\_\end{pmatrix}$
- $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix} \Longleftrightarrow \vec{v} = \_\_\_\_\vec{\imath} + \_\_\_\_\vec{\jmath}$
- $\vec{\imath}\begin{pmatrix}\_\_\_\\\_\_\_\end{pmatrix}$, $\vec{\jmath}\begin{pmatrix}\_\_\_\\\_\_\_\end{pmatrix}$, $\vec{0}\begin{pmatrix}\_\_\_\\\_\_\_\end{pmatrix}$

Dans tout ce qui suit, le plan est muni d'un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.

Propriété

Soit $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$

- $\vec{u} = \vec{v}$ si, et seulement si, $x = x'$ et $y = y'$.
- Si $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ alors $\vec{w}(x+x';y+y')$.
- Soit k un nombre réel.
  Si $\vec{w} = k\vec{u}$ a pour coordonnées $\vec{w}\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$.

Exemple : Si $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ alors :

- $-\vec{u}\begin{pmatrix}\_\_\_\\\_\_\_\end{pmatrix}$, $5\vec{v}\begin{pmatrix}\_\_\_\\\_\_\_\end{pmatrix}$
- $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}\_\_\_\\\_\_\_\end{pmatrix}$, $-\vec{u}+5\vec{v}\begin{pmatrix}\_\_\_\\\_\_\_\end{pmatrix}$

Théorème — et définition

Dire que le point M a pour coordonnées $(x;y)$ dans le repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ équivaut à dire que le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans ce repère

Autrement dit, M a pour coordonnées $(x;y)$ dans $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ si, et seulement si,
$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$

- x est l'**abscisse** du point M dans le repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$;
- y est l'**ordonnée** du point M dans le repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.

3. Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$

Propriété — coordonnées d'un vecteur

Si A a pour coordonnées $(x_A;y_A)$, et si B a pour coordonnées $(x_B;y_B)$,
alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

Démonstration : $A(x_A;y_A)$ dans $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ si, et seulement si, $\overrightarrow{OA} = x_A\vec{\imath} + y_A\vec{\jmath}$, $B(x_B;y_B)$ dans $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ si, et seulement si, $\overrightarrow{OB} = x_B\vec{\imath} + y_B\vec{\jmath}$

D'après la relation de Chasles on a
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} \\
&= -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \\
&= -(x_A\vec{\imath} + y_A\vec{\jmath}) + (x_B\vec{\imath} + y_B\vec{\jmath}) \\
&= -x_A\vec{\imath} - y_A\vec{\jmath} + x_B\vec{\imath} + y_B\vec{\jmath} \\
\overrightarrow{AB} &= (x_B - x_A)\vec{\imath} + (y_B - y_A)\vec{\jmath}
\end{aligned}$$

et donc, par définition, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

□

Exemple :

Si dans un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ du plan on a $A(5;-3)$, $B(-1;6)$ et $C(7;2)$ alors on peut calculer les coordonnées de

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$ $-3\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$ $2\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$ $-3\overrightarrow{AB}+ 2\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$

Propriété — milieu d'un segment

Si A a pour coordonnées $(x_A;y_A)$, et si B a pour coordonnées $(x_B;y_B)$,
alors le point I milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées

$$I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$$

Démonstration : I milieu de $[AB]$ si, et seulement si, $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Notons $(x_I;y_I)$ les coordonnées du point I . Alors :

les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AI}$ sont $\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$,

les coordonnées du vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$.

Ainsi, l'égalité vectorielle $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ équivaut à $\left\{\begin{array}{lcl} \quad & = & \quad \\ \quad & = & \quad \end{array}\right.$

qui donne bien $\left\{\begin{array}{lcl} x_I & = & \dfrac{x_A+x_B}{2} \\ y_I & = & \dfrac{y_A+y_B}{2} \end{array}\right.$

□

4. retour sur la colinéarité de deux vecteurs

On se place dans un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$. Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs.

$$\begin{aligned}
\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} &\iff \text{il existe } k\in\mathbb{R} \text{ tel que } \vec{v} = k\vec{u} \text{ ou } \vec{u} = k\vec{v} \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} x' = kx \\ y' = ky \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} x = kx' \\ y = ky' \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Cela signifie qu'on a une relation de proportionnalité entre les coordonnées :

x	y
x'	y'

$\times k$

ou

x'	y'
x	y

$\times k$

et par conséquent $xy' - x'y = 0$

Définition — **Déterminant**

On appelle déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre $xy' - x'y$.

Notation : $\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$

Théorème — **Condition nécessaire et suffisante de colinéarité**

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires équivaut à $\det(\vec{u},\vec{v}) = xy' - x'y = 0$.

Exemple : Comment faut-il choisir le réel λ pour que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 3\lambda \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -5 \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$ soient colinéaires ?

V Exercices

Coordonnées, calculs de distances

1

On donne les points $C(-1;-3)$ et $D(3;1)$. Déterminer par le calcul la longueur CD.

2

On considère les points $A(3;-1)$, $B(5;2)$ et $C(7;-1)$.

1. Calculer les longueurs AB, AC et BC.

2. Donner la nature du triangle ABC.

3

On considère les points $A(-2;1)$, $B(2;3)$ et $C(-3;3)$.

1. Calculer les longueurs AB, AC et BC.

2. En déduire la nature du triangle ABC.

4

On considère les points $A(-5;0)$, $B(3;-4)$ et $C(2;4)$.

1. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.

2. Calculer les longueurs OA et OB.

3. En déduire que la droite (OC) est la médiatrice du segment $[AB]$.

4. En déduire la nature du triangle OAB.

5

On considère les points $A(5;1)$, $B(-1;5)$, $C(1;8)$ et $D(7;4)$.

1. Montrer que le triangle ABC est rectangle.

2. Déterminer la nature du quadrilatère $ABCD$.

Vecteurs

6

$ABCD$ est un rectangle. Soit I le point d'intersection de ses diagonales.
K et J sont les symétriques respectifs de I et A par rapport à D.

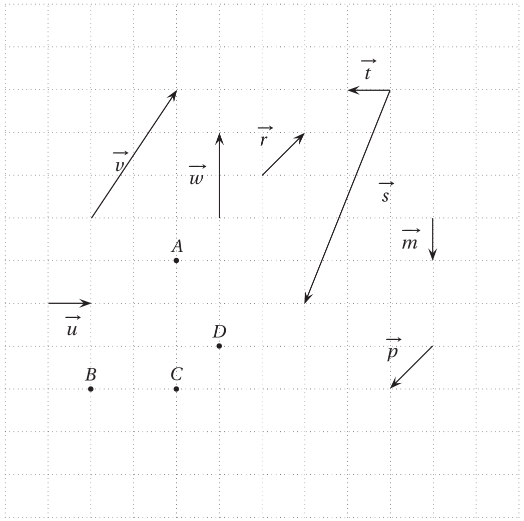
1. Montrer que $AIJK$ est un parallélogramme.

2. Citer tous les vecteurs égaux dans cette figure.

3. En déduire que $ICJK$ est un parallélogramme.

4. Que peut-on dire des droites (KI) et (JC) ?

7



1. À partir de la figure, citer un vecteur :

(a) opposé à $\overrightarrow{CD}$.

(b) de même direction et de même sens que $\overrightarrow{AC}$.

(c) de même direction que $\overrightarrow{BC}$ mais de sens contraire.

(d) égal au vecteur $\overrightarrow{BA}$.

2. Placer les points E, F, G et H images respectives du point A par les translations de vecteurs $\vec{w}$, $\vec{v}$, $\vec{p}$ et $\vec{m}$.

8

1. Construire un parallélogramme $ABCD$ de centre O. On note I le milieu de $[OC]$.

2. Construire A', le symétrique de A par rapport à D, et O' le symétrique de O par rapport à B.

3. (a) Démontrer que $\overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{DB}$.

(b) Démontrer que $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OO'}$.

(c) En déduire que I est le milieu de $[A'O']$.

9

Sur la figure ci-contre, construire les vecteurs suivants :

1. $\vec{u} + \vec{v}$

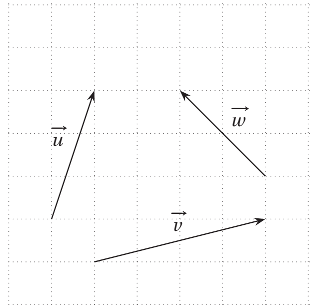
2. $\vec{v} + \vec{w}$

3. $\vec{w} - \vec{u}$

4. $\vec{u} + \vec{w}$

5. $-\vec{v}$

6. $\vec{u} - \vec{v}$



10

Sur la figure ci-contre, construire un représentant de chacun des vecteurs suivant :

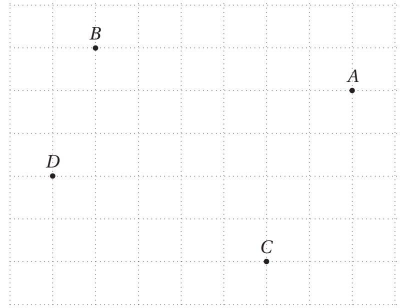
1. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$

2. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$

3. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$

4. $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CD}$

5. $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DB}$



11

La figure représente six parallélogrammes isométriques. En utilisant les points de la figure, donner un vecteur égal à :

1. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{KL}$

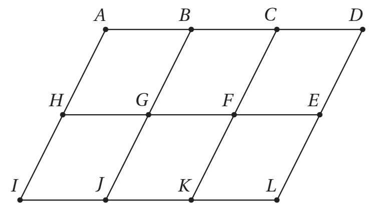
2. $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HF}$

3. $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GF}$

4. $\overrightarrow{KI} + \overrightarrow{BD}$

5. $\overrightarrow{EC} - \overrightarrow{CB}$

6. $\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{HA}$



12

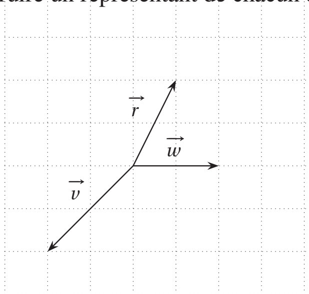
$ABCD$ est un rectangle de centre I. Faire une figure et construire les représentants des vecteurs suivants :

1. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD}$
2. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BI}$
3. $\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{AB}$
4. $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}$
5. $\overrightarrow{\ } + \overrightarrow{\ }$

13

Sur la figure ci-contre construire un représentant de chacun des vecteurs suivants :

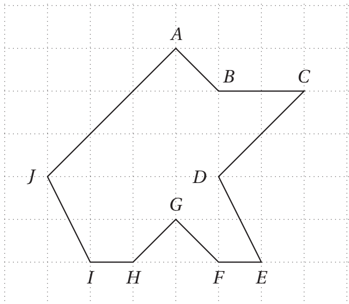
1. $-\vec{r}$
2. $\vec{w} + \vec{r}$
3. $\vec{r} + \vec{v}$
4. $\vec{w} - \vec{r}$



14

En utilisant les points de la figure, donner un vecteur égal à :

1. $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{HI}$
2. $\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GH}$
3. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}$
4. $\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{CB}$
5. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC}$
6. $\overrightarrow{HF} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$
7. $\overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{EI}$
8. $\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{FE}$
9. $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{IH} - \overrightarrow{BH} - \overrightarrow{FD}$



15

Écrire le plus simplement possible :

1. $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA}$
2. $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AA}$
3. $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB}$
4. $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA}$
5. $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA}$
6. $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB}$

16

A, B, C et D sont quatre points. Démontrer que :

1. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} - \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA}\right) = \overrightarrow{DA}$
2. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$

17

Simplifier les écritures suivantes :

1. $\vec{u} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB}$
2. $\vec{v} = -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} - 3\overrightarrow{BC} - 4\overrightarrow{CA}$

18

Compléter les égalités suivantes à l'aide de la relation de Chasles.

1. $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{\ldots A} + \overrightarrow{A\ldots}$
2. $\overrightarrow{HF} = \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{\ldots\ldots}$
3. $\overrightarrow{D\ldots} + \overrightarrow{C\ldots} = \overrightarrow{\ldots B}$
4. $\overrightarrow{E\ldots} + \overrightarrow{\ldots E} = \overrightarrow{\ldots\ldots}$
5. $\overrightarrow{A\ldots} = \overrightarrow{A\ldots} + \overrightarrow{B\ldots} + \overrightarrow{CM}$
6. $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{\ldots\ldots} = \vec{0}$

Produit d'un vecteur par un réel

19

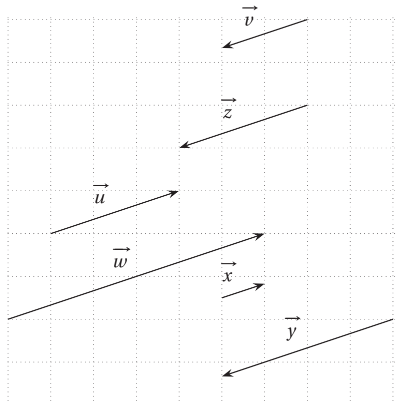
1. Attribuer à chaque vecteurs $\frac{1}{3}\vec{u}$, $-\vec{u}$, $2\vec{u}$, $-\frac{2}{3}\vec{u}$, et $-\frac{4}{3}\vec{u}$ son représentant tracé ci-dessous.

2. Parmi les vecteurs précédents, quels sont ceux qui :

(a) ont le même sens que $\vec{u}$

(b) ont une norme supérieure à celle de $\vec{u}$

(c) ont la même direction que $\vec{u}$



20

Sur une droite (AB), placer les points C, D, E et F tels que :

1. $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$
2. $\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
3. $\overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AB}$
4. $\overrightarrow{AE} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB}$

21

Simplifier les expressions vectorielles suivantes :

1. $-5\vec{u}+2\times 3\vec{u}$ **2.** $2\vec{u}-5\vec{v}-4\vec{u}+2\vec{v}$ **3.** $-12\vec{v}+\vec{u}-3\times 4\vec{v}-\vec{u}$ **4.** $2\vec{u}+3\vec{v}-2\left(5\vec{u}-2\vec{v}\right)$

22

Soient trois points A, B et C distincts non alignés. Montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires :

1. $\vec{u}=2\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=-6\overrightarrow{AB}$

2. $\vec{u}=-2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$ et $\vec{v}=4\overrightarrow{AB}-6\overrightarrow{AC}$

3. $\vec{u}=3\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ et $\vec{v}=9\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$

4. $\vec{u}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$ et $\vec{v}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}-9\overrightarrow{AC}$

5. $\vec{u}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$ et $\vec{v}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$

6. $\vec{u}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$ et $\vec{v}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

23

Soient trois points A, B et C distincts et non alignés. Les points M et N sont tels que $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.

1. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires.

2. Que peut-on en déduire pour les points A, M et N ?

24

$ABCD$ est un parallélogramme. Les points E et F sont tels que $\overrightarrow{BE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DF}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$.

1. Réaliser une figure.

2. Compléter :

$$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{\ldots\ldots}+\overrightarrow{BE} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BF}=\overrightarrow{\ldots\ldots}+\overrightarrow{DF}$$

3. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{BF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

4. En déduire que les droites (CE) et (BF) sont parallèles.

25

A, B et C sont trois points non alignés et distincts. On construit les points M, N et P tels que $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

1. Exprimer $\overrightarrow{MN}$ en fonction de $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2. Exprimer $\overrightarrow{MP}$ en fonction de $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AC}$.

3. En déduire que les points M, N et P sont alignés.

Coordonnées

26

On considère les points $A(5;-6)$ et $B(-2;6)$. Le point C est le milieu de $[AB]$.
Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{BC}$.

27

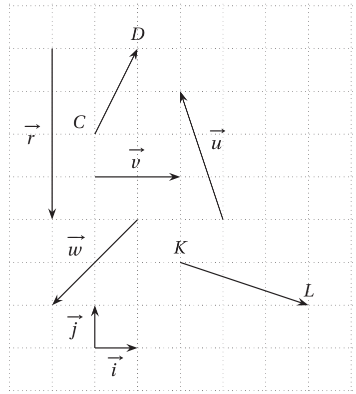
Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$.

1. Calculer les coordonnées de $\vec{u}+\vec{v}$ et de $\vec{u}-\vec{v}$.

2. Calculer les coordonnées de $3\vec{w}-2\vec{u}$.

28

Lire les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{r}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{KL}$.



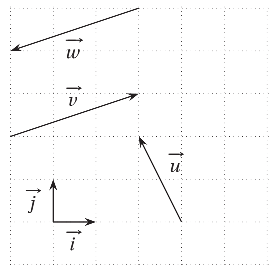
29

1. Lire sur la figure les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

2. Tracer les vecteurs suivants : $\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{u}+\vec{w}$, $\vec{u}-\vec{v}$ et $\vec{u}-\vec{w}$.

3. Lire leurs coordonnées.

4. Vérifier les résultats par le calcul.



30

On considère les points $E(2;-1)$, $F(-3;4)$ et $G(1;4)$.
Déterminer les coordonnées du point H pour que $EFGH$ soit un parallélogramme.

31

On considère les points $A(3;-4)$ et $B(-1;2)$. Quelles sont les coordonnées du point C tel que $\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AB}$?

32

On considère les points $M(-4;2)$, $N(0;3)$ et $P(1;-5)$.
Calculer les coordonnées du point Q défini par $\overrightarrow{MQ} = -3\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PN}$.

33

On considère les points $D(-4;2)$, $E(0;3)$ et $F(1;-5)$.
Calculer les coordonnées du point G défini par $\overrightarrow{DG} = -3\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{DF}$.

34

Les coordonnées des points A, et B et C sont respectivement $(3;2)$, $(9;-5)$, et $(-9;16)$. Sachant que ces points sont alignés, calculer le nombre k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

Retour sur la colinéarité

35

Pour les couples de vecteurs suivants :

1. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}3\\-4,5\end{pmatrix}$

2. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}3\\4,5\end{pmatrix}$

3. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}7\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\-\frac{3}{7}\end{pmatrix}$

4. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}7\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}14\\4\end{pmatrix}$

5. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}3\\-4,5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-8\\12\end{pmatrix}$

6. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\-\frac{3}{7}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}14\\4\end{pmatrix}$

1. Calculer les déterminants des deux vecteurs.

2. Dire si ils sont colinéaires.

3. S'ils sont colinéaires un coefficient de colinéarité.

36

Dans chaque cas, dire si les droites (AB) et (CD) sont parallèles en utilisant le calcul d'un déterminant.

1. $A(-2;1)$, $B(3;4)$, $C(2;2)$ et $D(5;4)$.

2. $A(2;2)$, $B(5;4)$, $C(1;4)$ et $D(-2;2)$.

3. $A(3;4)$, $B(5;0)$, $C(0;5)$ et $D(3;0)$.

37

Dans chaque cas, dire si les points A, et B et C sont alignés.

1. $A(-4;3)$, $B(2;3)$ et $C(6;3)$.

2. $A(2;5)$, $B(-4;-3)$ et $C(5;9)$.

3. $A(-2;1)$, $B(3;4)$ et $C(5;5)$.

38

Soit m un réel. Dans chacun des cas suivants, déterminer m afin que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ soient colinéaires.

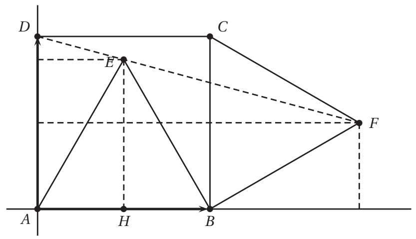
1. $\vec{u}\begin{pmatrix}m\\2\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}$

2. $\vec{u}\begin{pmatrix}m-2\\3\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\m-2\end{pmatrix}$

3. $\vec{u}\begin{pmatrix}-2m+1\\5\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}3m+4\\3\end{pmatrix}$

39

$ABCD$ est un carré. Le point E est intérieur au carré et tel que le triangle ABE soit équilatéral. Le point F est extérieur au carré et tel que le triangle BFC soit équilatéral.



On choisit comme repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$.

1. Quelles sont les coordonnées de A, B, C et D dans ce repère ?

2. (a) En remarquant que le triangle AHE est rectangle en H, calculer HE ;

(b) en déduire les coordonnées de E et de F.

3. En utilisant la colinéarité de vecteurs, démontrer que les points E, D et F sont alignés.

40

$ABCD$ est un parallélogramme. Les points E et F sont définis par les relations :

$$\overrightarrow{AE} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CF} = 3\overrightarrow{BC}.$$

On se place dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$.

1. Déterminer les coordonnées de D, E et F (justifier lorsque cela est nécessaire).

2. Démontrer que les points D, E et F sont alignés.