

Généralités sur les fonctions

I Notion de fonction

1. Définition

Définition

- Soit \mathcal{D} une partie de \mathbb{R} . On définit une fonction f quand à chaque réel x de \mathcal{D} on associe un **unique** réel de \mathbb{R} que l'on note $f(x)$.
- Notation : $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f(x)$

Remarque : f est une fonction, *i.e.* une relation entre deux ensembles de nombres, alors que $f(x)$ est un nombre !

Définition

- \mathcal{D} est appelé l'ensemble de définition de f ;
- $f(x)$ est l'image (unique!) de x ;
- quand on écrit $y = f(x)$, x est un antécédent de y .

Savoir-faire 1 Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction

- On définit f par $f(x) = \sqrt{2x-3}$, quel est l'ensemble de définition de f ?

- On définit f par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-3}}$, quel est l'ensemble de définition de f ?

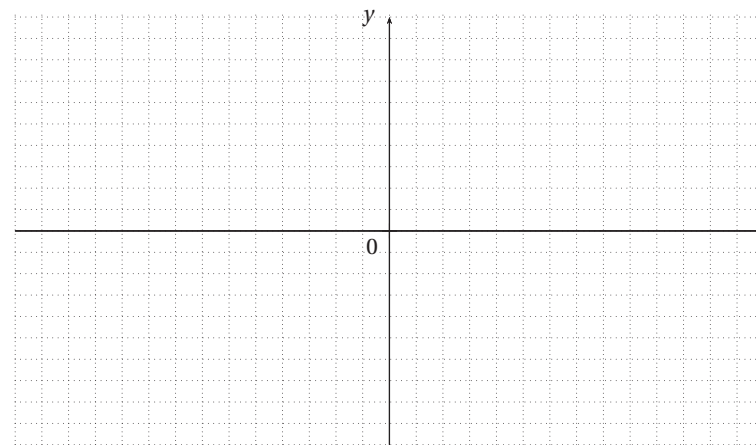
2. Représentation graphique

Définition

Dans un repère, la courbe représentative de la fonction f est l'ensemble des points $M(x; y)$ où :

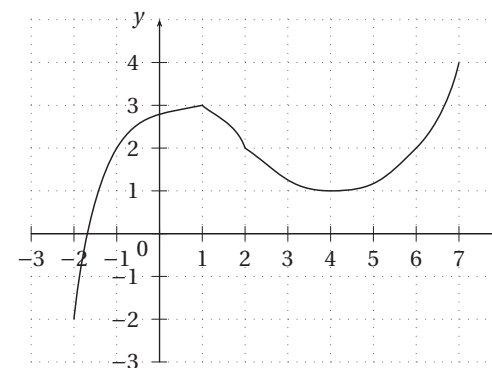
- l'abscisse x décrit \mathcal{D} l'ensemble de définition ;
- l'ordonnée y est l'image de x par f , *i.e.* $x \in \mathcal{D}$ et $y = f(x)$.

La courbe représentative de f est donc l'ensemble de points $\{M(x, y) \text{ tels que } y = f(x), x \in \mathcal{D}\}$ et $y = f(x)$ est l'équation de celle-ci.



Savoir-faire 2 Déterminer graphiquement l'ensemble des antécédents d'un nombre.

La fonction f est représentée ci-dessous :



1. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 2$.

2. Déterminer l'ensemble des antécédents de 2 par f .
3. Déterminer l'ensemble des antécédents de 3 par f .
4. résoudre $f(x) \geq 0$.

3. Parité d'une fonction

Définition

Ensemble symétrique par rapport à O

Un sous ensemble D de \mathbb{R} est dit symétrique par rapport à O lorsque pour tout $x \in D$, on a aussi $-x \in D$.

Exemple : _____

Définition

Fonction paire

Une fonction f définie sur D est paire lorsque :

- D est symétrique par rapport à O ;
- pour tout $x \in D$, $f(x) = f(-x)$.

Propriété

La courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Démonstration : _____

Exemple : _____

Définition

Fonction impaire

Une fonction f définie sur D est impaire lorsque :

- D est symétrique par rapport à O ;
- pour tout $x \in D$, $f(-x) = -f(x)$.

Propriété

La courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.

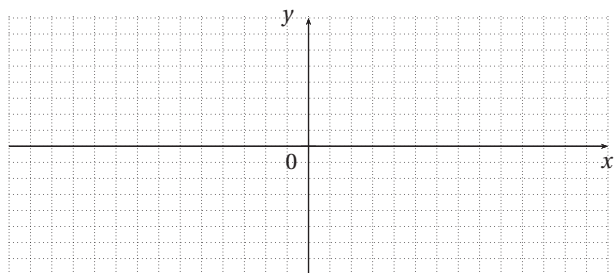
Exemple : _____

II Variations

1. Croissance - décroissance

Définition **fonction croissante**

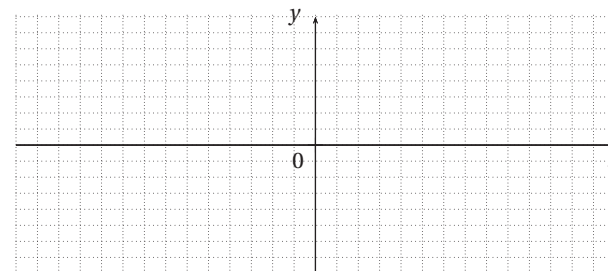
- f est **strictement croissante** sur l'intervalle I signifie que :
pour tous réels a et b de I , si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$.
- f est **croissante** sur l'intervalle I signifie que :
pour tous réels a et b de I , si $a \leq b$ alors $f(a) \leq f(b)$.



Remarque : $f(a)$ et $f(b)$ sont rangés dans le même ordre que a et b . On dit que f conserve l'ordre.

Définition **fonction décroissante**

- f est **strictement décroissante** sur l'intervalle I signifie que :
pour tous réels a et b de I , si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$.
- f est **décroissante** sur l'intervalle I signifie que :
pour tous réels a et b de I , si $a \leq b$ alors $f(a) \geq f(b)$.



Remarque : $f(a)$ et $f(b)$ sont rangés dans l'ordre contraire de a et b . On dit que f change l'ordre.

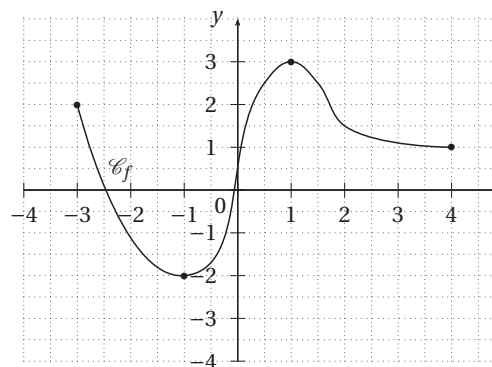
Définition **fonction strictement monotone**

Une fonction **strictement monotone** sur un intervalle I est une fonction qui est soit strictement croissante, soit strictement décroissante sur I .

2. Tableau de variation

On résume le sens de variation d'une fonction à l'aide d'un **tableau de variations**.

Exemple :



x	
Var. f	

III Extremum

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

- La fonction f admet un maximum en a sur l'intervalle I lorsque :
pour tout x de I , $f(x) \leq f(a)$.

$f(a)$ est le maximum de f sur I .

- La fonction f admet un minimum en a sur l'intervalle I lorsque :
pour tout x de I , $f(x) \geq f(a)$.

$f(a)$ est le minimum de f sur I .

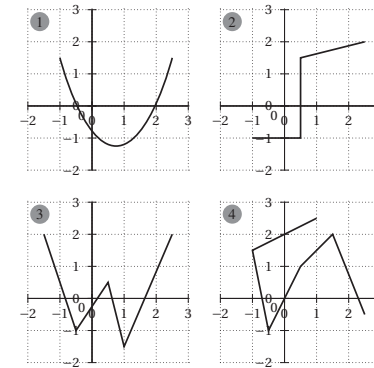
Exemple : _____

IV Exercices

Généralités sur les fonctions

1

La figure ci-dessous représente des courbes. Quelles sont celles qui définissent des fonctions ?



2

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{4}{3}x + 5$.

1. Calculer $f(6)$ et $f(7)$.
2. Quelle est l'image de -5 par f ?

3

Soit la fonction h définie sur \mathbb{R} par $h(x) = 3x - 8$. Déterminer les éventuels antécédents par f des nombres suivants :

1. 3
2. -5
3. $\frac{1}{2}$

4

On considère la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{4x + 2}{1 + x^2}$.

1. A-t-on $f(3) = 1$?
2. Les images de 2 et 0 par f sont-elles égales ?
3. Déterminer l'image de $\frac{1}{2}$ par f .
4. Déterminer les antécédents de 0 par f .

5

Soit f la fonction définie sur $[-3;5]$ par $f(x) = x^2 - x - 6$.

Ci-dessous, on donne \mathcal{C}_f , la courbe représentative de f .

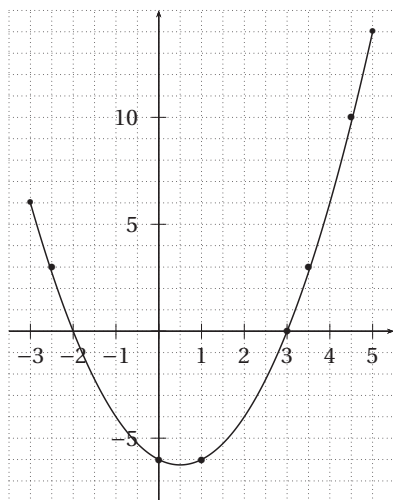
1. Déterminer graphiquement :

- (a) $f(0)$
- (b) l'image de 3 par f
- (c) les éventuels antécédents de -4 par f
- (d) les éventuels antécédents de 0 par f
- (e) les éventuelles solutions de l'équation $f(x) = 10$.
- (f) les éventuels antécédents de -6 par f
- (g) l'ordonnée du point de \mathcal{C}_f d'abscisse 5
- (h) les solutions de l'équation $f(x) = 3$

2. Déterminer algébriquement l'image de $\frac{1}{2}$ par f .

3. Montrer que pour tout x de $[-3;5]$, $f(x) = (x-3)(x+2)$.

4. Retrouver algébriquement les antécédents de 0 par f .



6

Soient f , g et h trois fonctions définies sur \mathbb{R} par :

$\square f(x) = 2x^2 + 4x - 6$

$\square g(x) = 2(x+1)^2 - 8$

$\square h(x) = 2(x-1)(x+3)$

1. Montrer que $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$ sont trois expressions de la même fonction.

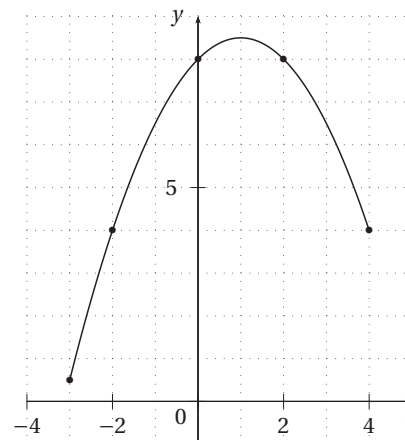
9

2. Répondre aux questions suivantes en choisissant à chaque fois la forme la plus adaptée.

- (a) Chercher les éventuels antécédents de 0 et -6 .
- (b) Calculer les images de 0, 1 et de $\sqrt{3}-1$.
- (c) Trouver les abscisses des points de f d'ordonnée égale à 24 appartenant à la courbe de f .

7

On considère une fonction f dont on donne la représentation graphique sur $[-3; 4]$.

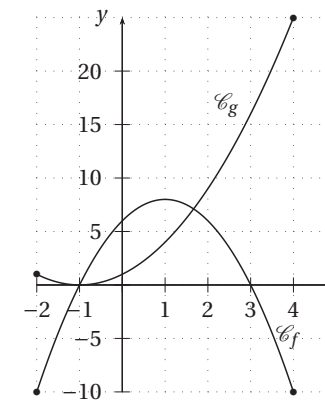


- 1. Déterminer l'image de 2
- 2. Donner la valeur de $f(-2)$
- 3. Donner une valeur approchée des antécédents de 5.
- 4. Résoudre $f(x) = 4$
- 5. Résoudre $f(x) \leq 4$
- 6. Résoudre $f(x) < 4$
- 7. Résoudre $f(x) \geq 8$

8

On donne ci-dessous les courbes représentatives de deux fonctions f et g sur $[-2; 4]$. Résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes :

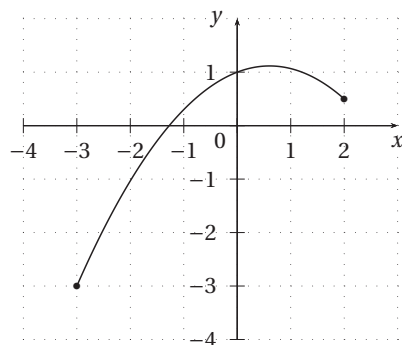
- 1. $f(x) = -5$
- 2. $f(x) > 5$
- 3. $f(x) \leq 0$
- 4. $f(x) = g(x)$



10

9

On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f . Par lecture graphique, déterminer l'ensemble de définition de f .



10

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$.

- Résoudre $x-1=0$.
- De quel(s) nombre(s) ne peut-on pas calculer l'image par f et pourquoi?
- En déduire l'ensemble de définition de f .

11

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions dont les expressions sont données ci-dessous :

- $f(x) = \frac{5+x}{10-x}$
- $f(x) = 2\sqrt{x}$
- $f(x) = \frac{2+x}{2+x}$
- $f(x) = \frac{3+x}{5+|x|}$

12

Le prix de l'essence sans plomb est de 2 euros le litre. Un conducteur veut faire le plein de sa voiture. Il compte mettre x litres dans son réservoir vide qui peut contenir 40 litres.

La station dans laquelle il se sert ne délivre pas moins de 5 litres.

On considère la fonction P qui à chaque valeur de x associe le prix payé par le conducteur.

- D'après le contexte de l'exercice, à quel intervalle x appartient-il?
- Quel l'ensemble de définition de la fonction P ?
- Déterminer l'expression algébrique de la fonction P .

13

On munit le plan d'un repère $(O; I, J)$. Traduire par des égalités de la forme $f(a) = b$, les phrases suivantes :

- -5 est l'image de 4 par f .
- 2 a pour image 0 par h .
- 5 est un antécédent de -3 par f .
- Les images de -5 et 2 par f sont nulles.
- La courbe représentative \mathcal{C}_f de f passe par le point $A(-3; 1)$.
- La courbe représentative \mathcal{C}_g de g coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 2.
- La courbe représentative \mathcal{C}_h de h coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses respectives -1 et 5.
- La courbe représentative \mathcal{C}_f de f passe par l'origine du repère.
- L'ordonnée du point d'abscisse -2 de \mathcal{C}_h vaut -3 .

14

Soit une fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 + 3x + p$ où p est un réel. Déterminer p sachant que $A(5; 22)$ appartient à la courbe de f .

15

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $g(x) = \frac{4x+6}{1+x}$ et \mathcal{C}_g sa courbe représentative dans un repère.

- Le point $A(-2; 2)$ appartient-il à \mathcal{C}_g ?
- Le point $B(x_B; 5)$ appartient à \mathcal{C}_g , déterminer l'abscisse x_B .

16

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -2x + 15$. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe représentative de f avec les axes des abscisses.

17

Soit $E = \{M(x; y) \text{ tels que } 3x^2 + 2y - 4 = 0 \text{ où } x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\}$.

- Montrer que le point $A(-2; -4)$ appartient à E .
- B appartient à E et son abscisse est égale à 0. Calculer l'ordonnée de B .
- Montrer que E correspond à la courbe d'une fonction f dont on précisera l'expression.

18

Dans chaque cas, déterminer la parité de la fonction f définie sur \mathbb{R} .

- $f(x) = x^3 - 1$
- $f(x) = x^2 + 1$
- $f(x) = -5x^2 + 3x^4$
- $f(x) = 2x - 4x^3$
- $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$
- $f(x) = (x + 5)^2$

19

Dans chaque cas, déterminer la parité de la fonction f définie sur \mathbb{R} .

1. $f(x) = -7x^2$
2. $f(x) = -\frac{2x^2}{4+x^2}$
3. $f(x) = 4x^3$
4. $f(x) = x^4$

20

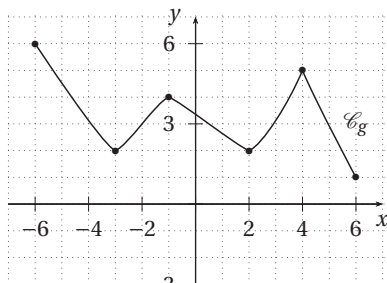
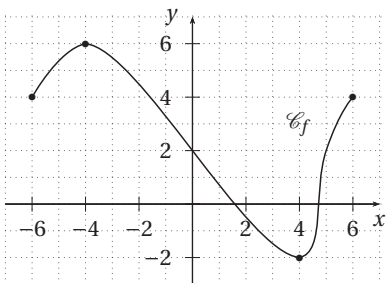
Dans chaque cas, étudier la parité de la fonction f définie sur \mathbb{R} .

1. $f(x) = |x|$
2. $f(x) = -|x|$
3. $f(x) = \frac{1}{x^3}$ si $x \neq 0$, 1 sinon.
4. $f(x) = x + \frac{1}{x^2 + 1}$

Variations

21

Dresser les tableaux de variations des fonctions f et g représentées ci-dessous.



22

Voici des informations concernant une fonction f définie sur l'intervalle $[-1; 5]$:

- $f(-1) = f(5) = 0$, $f(2) = 3$, et $f(4) = -2$;
- f est croissante sur $[-1; 2]$ et sur $[4; 5]$;
- f est décroissante sur $[2; 4]$.

1. Dresser le tableau de variations de f .
2. Tracer deux courbes différentes susceptibles de représenter graphiquement la fonction f .

23

f est une fonction dont voici le tableau de variations.

x	-5	-3	1	4
Var. f	↗ 13		↘ 1	

1. Donner son ensemble de définition.
2. Donner un encadrement de $f(x)$ lorsque $x \in [-5; -3]$.
3. Donner un encadrement de $f(x)$ lorsque $x \in [-3; 4]$.
4. Comparer, si possible, les nombres suivants :
 - (a) $f(-4)$ et $f(-3)$
 - (b) $f(-2)$ et $f(3)$

24

f est une fonction dont voici le tableau de variations.

x	3	5	6	10
Var. f	↗ 9		↘ -4	

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie, fausse ou si on ne peut pas conclure. Justifier.

1. $f(3) < f(4)$
2. $f(4,9) > f(5,9)$
3. $f(5,1) < f(5,9)$
4. $f(10) > f(3)$

25

f est une fonction dont voici le tableau de variations.

x	-10	-2	0	7,5
Var. f	↗ $\frac{5}{2}$		↘ -1	

Comparer si possible les nombres suivants en justifiant.

1. $f(-2)$ et $f(-1)$
2. $f\left(\frac{1}{3}\right)$ et $f\left(\frac{3}{2}\right)$
3. $f(3,6)$ et $f(3,7)$
4. $f\left(\frac{3}{2}\right)$ et $f(4)$
5. $f(-5)$ et $f(-3)$

26

Soit f une fonction définie sur $[-2; 5]$ telle que :

- $f(-2) = 2$
- $f(5) = 0$
- $f(2) = -3$
- f est décroissante sur $[-2; 2]$ et croissante sinon.

1. Encadrer $f(x)$ lorsque :

- (a) $x \in [-2; 2]$
- (b) $x \in [2; 5]$

2. Si $x \in [-2; 5]$, donner un encadrement de $f(x)$.

27

- Soient f une fonction paire définie sur \mathbb{R} et a et b deux réels tels que $0 \leq a \leq b$. Montrer que, si f est croissante sur $[a; b]$ alors f est décroissante sur $[-b; -a]$.
- Soient f une fonction impaire définie sur \mathbb{R} et a et b deux réels tels que $0 \leq a \leq b$. Montrer que, si f est croissante sur $[a; b]$ alors f est croissante sur $[-b; -a]$.

28

En s'aidant de l'exercice précédent compléter les tableaux de variations suivants :

1. f est une fonction paire.

x	-3	-2	0	3
Var. f	2		4	

↘ ↗
-1

2. f est une fonction impaire.

x	-5	-1	0	5
Var. f	-1		0	

↘ ↗
-3

29

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 + 2x + 3$. Le but de l'exercice est d'étudier le sens de variation de f .

- Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$. Montrer que $f(b) - f(a) = (b - a)(b + a + 2)$.
- (a) Montrer que, si $-1 \leq a \leq b$, alors $f(b) - f(a) \geq 0$.
(b) Que peut-on en déduire pour f sur $[-1; +\infty[$?
- Montrer que f est décroissante sur $] +\infty; -1]$.

Extremums

30

Une fonction possède les propriétés suivantes :

15

- elle est définie sur $[-3; 5]$
- elle est croissante sur $[-3; -1]$
- elle est décroissante sur $[-1; 4]$
- elle est croissante sur $[4; 5]$
- sur l'intervalle $[-3; 4]$, son maximum vaut 6
- sur l'intervalle $[-1; 5]$, son minimum vaut -3
- l'image de -3 est 1
- 5 est un antécédent de 7

Dresser le tableau de variation de cette fonction.

31

Voici le tableau de variations d'une fonction.

x	-5	-4	-2	0	3
Var. f	5		4		5

↘ ↗ ↘ ↗
3 1

- Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?
- Préciser les extremums éventuels de la fonction f et les valeurs de x pour lesquelles ils sont atteints.

32

Pour chacune des fonctions définies par les expressions suivantes, tracer une représentation graphique sur la calculatrice, puis décrire ses variations et dresser son tableau de variations le plus précisément possible (on pourra s'inspirer de TP page 211 de votre manuel scolaire).

- $f(x) = 4x^3 - 5x + \frac{5}{2}$ pour $x \in [-1; 2]$.
- $g(x) = \frac{3x-6}{x+2}$ pour $x \in [0; 6]$.

33

Mêmes consignes avec :

- $f(x) = x^3 - 4x + 1$ pour $x \in [-2; 2]$.
- $g(x) = 2\sqrt{3}$ pour $x \in [0; 9]$.

16