

Fonctions de références

I Fonctions affines

1. Définitions

Définition

On appelle fonction affine une fonction f définie sur \mathbb{R} par une expression de la forme

$$f(x) = ax + b,$$

où a et b sont des nombres réels fixés.

Cas particulier : lorsque $b = 0$, la fonction f définie par $f(x) = ax$ est dite linéaire.

- a s'appelle le coefficient directeur ;
- b s'appelle l'ordonnée à l'origine.

Exemple :

- La fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = -3x + 5$ est affine ;
- La fonction h définie sur \mathbb{R} par $h(x) = 8x$ est linéaire.

2. Étude des variations

Propriété

Soit f une fonction affine définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax + b$.

- Si $a > 0$, alors f est strictement croissante sur \mathbb{R} ;
- si $a < 0$, alors f est strictement décroissante sur \mathbb{R} ;
- si $a = 0$ alors f est constante sur \mathbb{R} .

Démonstration : Soit $f : x \mapsto ax + b$ et soient c et d deux réels tels que $c < d$.

$f(d) - f(c) =$ _____

Comme $c < d$ on a _____ le signe de $a(d - c)$ ne dépend que de a .

□ Si $a > 0$ $f(d) - f(c)$ _____

$c < d \implies f(c) < f(d)$, on en déduit que f est _____

□ Si $a < 0$ $f(d) - f(c)$ _____

$c < d \implies f(d) < f(c)$, on en déduit que f est _____

□ Si $a = 0$ $f(d) - f(c)$ _____

□

Exemple :

□ La fonction $f : x \mapsto 3x - 6$ est _____

□ La fonction $f : x \mapsto -5x + 4$ est _____

□ La fonction $f : x \mapsto 6$ est _____

3. Représentation graphique

Théorème

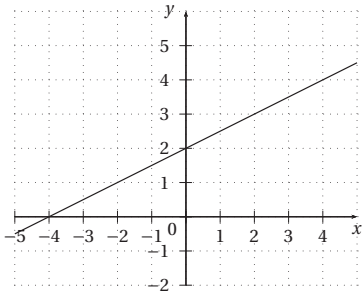
(admis)

Dans un repère, la représentation graphique d'une fonction affine est une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.

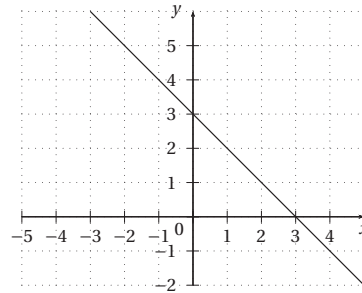
Réciproquement, toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées est la représentation graphique d'une fonction affine.

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax + b$.

$a > 0$



$a < 0$

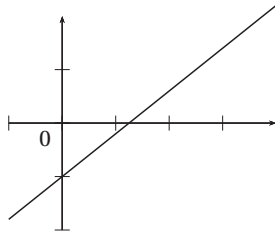


4. Signe de $ax + b$, $a \neq 0$

Théorème

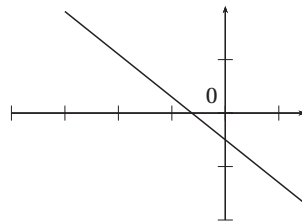
$ax + b$ est du signe de a pour les valeurs de x supérieures à la valeur x_0 qui annule $ax + b$.

$a > 0$



x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$ax + b$		0	

$a < 0$



x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$ax + b$		0	

Exemple : _____

Savoir-faire 1 Trouver l'expression d'une fonction affine

Une fonction affine f est telle que $f(-1) = -3$ et $f(2) = 5$. Déterminer l'expression de f .

Savoir-faire 2 Déterminer le sens de variation d'une fonction affine

Donner le sens de variation de chacune des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto (\pi - 3, 14)x + 1$ _____

2. $f : x \mapsto (\sqrt{2} - 2)x - 3$ _____

II Fonction carré

1. Définition et variations

Définition

La fonction carré est la fonction définie sur \mathbb{R} qui à tout réel x associe son carré. En notant f cette fonction, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = x^2.$$

Théorème

La fonction carré est strictement décroissante sur $] -\infty; 0]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Démonstration : Soit $f : x \mapsto x^2$ et soient a et b deux réels non-nuls tels que $a < b$.

$f(b) - f(a) =$ _____

Comme $a < b$ on a _____

□ Si $a < b < 0$ alors _____ par conséquent $f(b) - f(a) =$ _____

$a < b \implies f(b) < f(a)$, on en déduit que f est _____

□ Si $0 < a < b$ alors _____ par conséquent $f(b) - f(a) =$ _____

$a < b \implies f(a) < f(b)$, on en déduit que f est _____

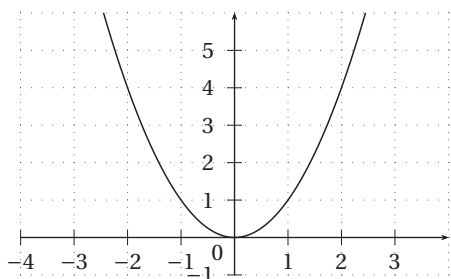
□

Tableau de variation de la fonction carré

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Var. f			

2. Représentation graphique de la fonction carré

La courbe représentative de la fonction carré s'appelle une **parabole**.



Remarque : La fonction carré est paire : _____

3. Exemple d'utilisation du sens de variation de la fonction carré

□ Trouver un encadrement de x^2 lorsque $x \in [2; 5]$. _____

□ Trouver un encadrement de x^2 lorsque $x \in [-4; -1]$. _____

□ Montrons que la fonction $f : x \mapsto -2(x - 3)^2 + 1$ est décroissante sur $[3; +\infty[$.

III Fonction inverse

1. Définition et variations

Définition

La fonction inverse est la fonction définie sur \mathbb{R}^* qui à tout réel x non nul associe son inverse. En notant f cette fonction, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

Théorème

La fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

Démonstration : Soit $f: x \mapsto \frac{1}{x}$ et soient a et b deux réels non-nuls tels que $a < b$.

$f(b) - f(a) =$ _____

Comme $a < b$ on a _____

□ Si $a < b < 0$ alors _____ par conséquent $f(b) - f(a) =$ _____

$a < b \implies f(b) < f(a)$, on en déduit que f est _____

□ Si $0 < a < b$ alors _____ par conséquent $f(b) - f(a) =$ _____

$a < b \implies f(b) < f(a)$, on en déduit que f est _____ □

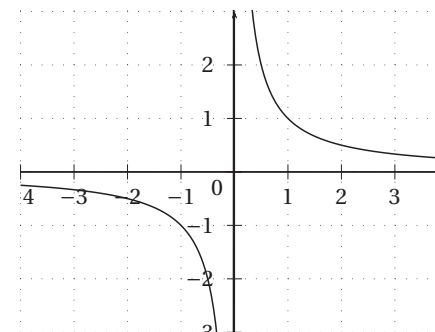
Remarque : _____

Tableau de variation de la fonction inverse

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Var. f			

2. Représentation graphique de la fonction inverse

La courbe représentative de la fonction inverse s'appelle une **hyperbole**.



Remarque :

La fonction inverse est impaire : _____

IV Fonction cube

1. Définition et variations

Définition

La fonction cube est la fonction définie sur \mathbb{R} qui à tout réel x associe son cube. En notant f cette fonction, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = x^3.$$

Théorème

La fonction cube est strictement croissante sur \mathbb{R} .

Démonstration : Soit $f: x \mapsto x^3$ et soient a et b deux réels non-nuls tels que $a < b$.

Comme $a < b$, $b - a > 0$.

□ Si $a \leq 0 \leq b$.

□ Si $a < b \leq 0$ ou $0 \leq a < b$.

Montrons que $b^3 - a^3 = (b - a)(b^2 + ab + a^2)$.

$(b - a)(b^2 + ab + a^2) =$ _____

Ainsi, $f(b) - f(a) =$ _____

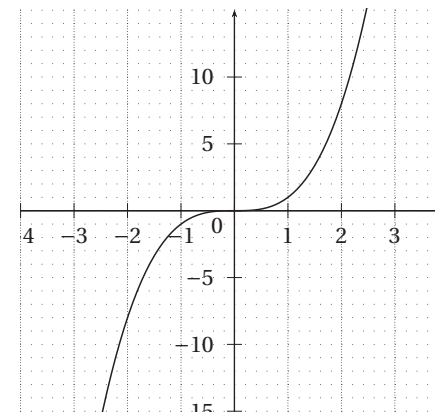
$a < b \implies f(a) < f(b)$, on en déduit que f est _____

□

Tableau de variation de la fonction cube

x	$-\infty$	$+\infty$
Var. f		

2. Représentation graphique de la fonction cube



Remarque : La fonction cube est impaire : _____

V Fonction racine carrée

1. Définition et variations

Définition

La fonction racine carrée est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ qui à tout réel x non nul associe sa racine carrée. En notant f cette fonction, on a pour tout $x \in [0; +\infty[$:

$$f(x) = \sqrt{x}.$$

Théorème

La fonction racine carrée est strictement croissante sur \mathbb{R} .

Démonstration : Soit $f: x \mapsto \sqrt{x}$ et soient a et b deux réels positifs tels que $a < b$.

$f(b) - f(a) =$ _____

Comme $a < b$ on a _____

$\sqrt{a} + \sqrt{b}$ _____

Par conséquent $f(b) - f(a) = \frac{b-a}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ _____

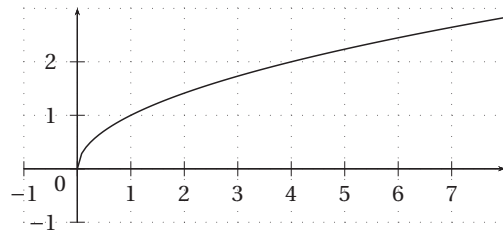
$a < b \implies f(a) < f(b)$, on en déduit que f est _____

□

Tableau de variation de la fonction racine carrée

x	0	$+\infty$
Var. f		

2. Représentation graphique de la fonction racine carrée



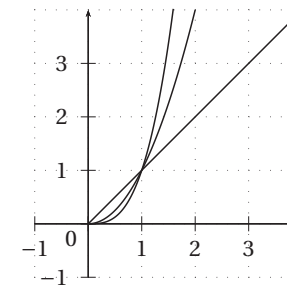
VI Comparaisons et positions relatives

Propriété

- Pour tout réel $x \in [0; 1]$, $x^3 \leq x^2 \leq x$.
- Pour tout réel $x \geq 1$, $x \leq x^2 \leq x^3$.

Interprétation géométrique : on note \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 et \mathcal{C}_3 les courbes d'équations respectives $y = x$, $y = x^2$ et $y = x^3$.

- Sur $[0; 1]$, \mathcal{C}_1 est au-dessus de \mathcal{C}_2 qui est au-dessus de \mathcal{C}_3 .
- Sur $[1; +\infty[$, \mathcal{C}_1 est en dessous de \mathcal{C}_2 qui est en dessous de \mathcal{C}_3 .



Démonstration : _____

□

VII Exercices

Comparer des nombres

1

On note f la fonction carré.

1. Rappeler son tableau de variations.
2. Comparer les nombres suivants :

(a) $f(1)$ et $f(4)$

(b) $f(-3)$ et $f(-2)$

2

On note f la fonction inverse.

1. Rappeler son tableau de variations.

2. Comparer les nombres suivants :

(a) $f(2)$ et $f(9)$

(b) $f(-1)$ et $f(-0,5)$

3

Sans calcul mais en justifiant, comparer les nombres suivants :

1. $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{3,2}$

2. $\frac{1}{-2}$ et $\frac{1}{-1,5}$

4

On note f la fonction racine carrée.

1. Rappeler son tableau de variations.

2. Comparer les nombres suivants :

(a) $f(1)$ et $f(4)$

(b) $f\left(\frac{7}{2}\right)$ et $f(3,2)$

5

Sans calcul mais en justifiant, comparer les nombres suivants :

1. $\sqrt{3}$ et $\sqrt{2,7}$

2. $\sqrt{\frac{3}{2}}$ et $\sqrt{\frac{4}{3}}$

6

On note f la fonction cube.

1. Rappeler son tableau de variations.

2. Comparer les nombres suivants :

(a) $f(0)$ et $f(4)$

(b) $f(-3)$ et $f(2)$

7

Sans calcul mais en justifiant, comparer les nombres suivants :

1. $\sqrt{2^3}$ et $\sqrt{3^3}$

2. $\sqrt{\frac{1}{2,1^3}}$ et $\sqrt{\frac{1}{2,2^3}}$

Encadrements

8

Dans les cas suivants, donner un encadrement de x^2 :

1. $2 < x < 5$

3. $-3 < x < 2$

2. $-7 < x < -1$

4. $x \in [-2; 0[\cup]0; 3]$

9

Dans les cas suivants, donner un encadrement de $\frac{1}{x}$:

1. $2 \leq x \leq 5$

3. $-7 < x < -1$

2. $0 < x < 3$

4. $x \in [-2; -0, 1]$

10

Dans les cas suivants, donner un encadrement de x :

1. $1 < \frac{1}{x} < 3$

3. $\frac{2}{3} < \frac{1}{x} < \frac{7}{6}$

2. $-4 < \frac{1}{x} < -2$

4. $-2 < \frac{1}{x} < 0$

11

Dans les cas suivants, donner un encadrement de x^3 :

1. $0 \leq x \leq 2$

3. $-3 < x < 6$

2. $-1 \leq x < 0$

4. $\frac{1}{2} \leq x \leq 1,5$

12

ABC est un triangle.

1. On connaît exactement deux dimensions en cm :

$$AB = 2,6 \quad \text{et} \quad BC = 5,1$$

Sachant que la valeur du périmètre est comprise entre 13,4 cm et 13,5 cm :

(a) Donner un encadrement de AC ;

(b) ABC peut-il être rectangle ?

Rappel (Pythagore) : Un triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

2. On sait que $AB = 3,1$ cm et $BC = 5,8$ cm. La valeur du périmètre étant comprise entre 13,7 cm et 13,8 cm, ce triangle peut-il être rectangle ?