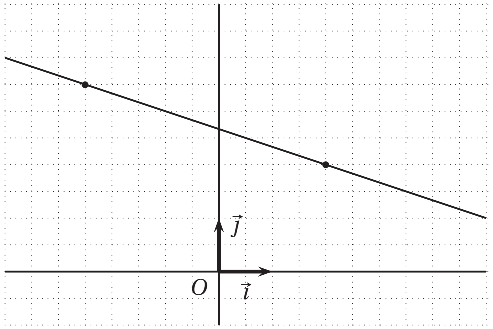
Équations de droites, systèmes

I Équations de droites

1. Équation cartésienne d'une droite

Définition

Un vecteur **non nul** $\vec{u}$ est un vecteur directeur d'une droite d signifie qu'il existe deux points distincts A et B de d tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.



-
-

Propriété

La droite d passant par un point A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.

Démonstration :

□

Seconde Équations de droites, systèmes

Remarque :

- Une droite d peut être définie par un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$. Dans ce cas d est la droite (AB) où B est tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.
- $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ colinéaires et $\vec{u} \neq \vec{0}$ implique qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$. Ainsi d est l'ensemble des points M tel que $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$, avec k qui décrit $\mathbb{R}$.

Propriété

- Toute droite d du plan muni d'un repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ est l'ensemble des points de coordonnées $\left(x ; y\right)$ vérifiant une relation du type $ax + by + c = 0$ avec $(a ; b) \neq (0 ; 0)$.

  La relation $ax + by + c = 0$ est une **équation cartésienne** de d .
- Réciproquement (admis) : si $(a ; b) \neq (0 ; 0)$ alors l'ensemble des points $M\left(x ; y\right)$ tels que $ax + by + c = 0$ est une droite de vecteur directeur $\vec{u}\,(-b ; a)$.

Démonstration :

Soit d une droite du plan, montrons que d correspond à un ensemble de points de coordonnées $\left(x ; y\right)$ vérifiant une relation du type $ax + by + c = 0$.

□

Remarque :

Exemple :

- Déterminer un vecteur directeur :

  1. de la droite des abscisses.

  2. de la droite des ordonnées.

  3. de la droite d d'équation $2x-3y+6=0$.

- Soit d la droite passant par $A(1;3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$. Déterminons une équation cartésienne de la droite d.

Savoir-faire 1 **Déterminer une équation cartésienne de droite**

Dans le plan muni d'un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, on considère les points $A(-4;3)$, $B(2;-1)$, $C(3;2)$ et un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).

2. Déterminer une équation cartésienne de la droite d_1 passant par C et de vecteur directeur $\vec{u}$.

3. Déterminer une équation cartésienne de la droite d_2 passant par C et parallèle à la droite (AB).

Propriété

Soient d et d' deux droites d'équations cartésiennes respectives $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c=0$ avec $(a;b)\neq(0;0)$ et $\left(a';b'\right)\neq(0;0)$.
Les droites d et d' sont parallèles si, et seulement si, $ab'-a'b=0$.

Démonstration :

□

Exemple : Soient d et d' d'équations respectives $-3x+2y+1=0$ et $9x-6y-5=0$.

2. Équation réduite d'une droite

Propriété (et définition)

Toute droite d du plan a pour **équation réduite** :

- $y = mx + p$ si la droite n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées ;
- $x = k$ sinon.

m s'appelle le coefficient directeur et p l'ordonnée à l'origine.

Démonstration :

Remarque :

- Une droite d possède une unique équation réduite mais une infinité d'équations cartésiennes.

  Par exemple,

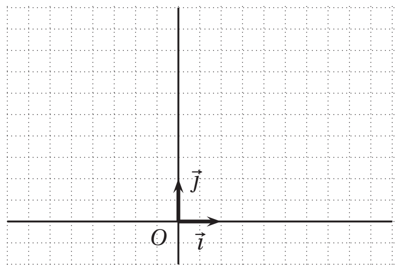
-

Propriété

Soit d une droite d'équation réduite $y = mx + p$ et $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$ deux points distincts de d.

Le coefficient directeur de la droite d est le réel $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Exemple :



Soit d la droite passant par les points $A(-2\,;1)$ et $B(2\,;3)$.

-
-

Remarque :

- Une droite d'équation réduite $y = mx + p$ est la représentation graphique de la fonction affine définie par $f(x) = mx + p$.
- Deux droites d et d' d'équations réduites respectives $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ sont parallèles si, et seulement si, $m = m'$.

Savoir-faire 2 **Tracer une droite à partir d'une équation**

Le plan est muni d'un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.

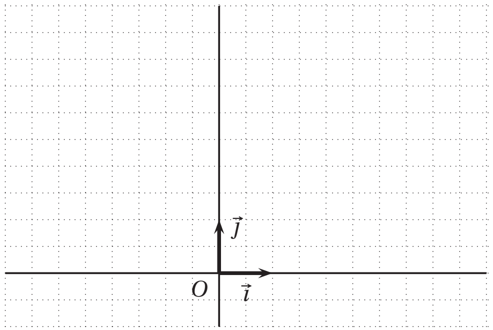
1. Construire la droite d_1 d'équation cartésienne $5x + 4y - 6 = 0$.

2. Construire la droite d_2 d'équation réduite $y = \frac{1}{2}x - 1$.

3. On considère deux points $E(-24\,;-5)$ et $F(51\,;20)$.

(a) Déterminer l'équation réduite de la droite (EF).

(b) Construire la droite (EF) en utilisant son ordonnée à l'origine et son coefficient directeur.



II Systèmes de deux équations à deux inconnues

1. Définitions

Définition

Un système linéaire de deux équations à deux inconnues x et y est un système qui peut s'écrire sous la forme

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

où a, b, c, a', b' et c' sont des réels fixés tels que $(a\,;b) \neq (0\,;0)$ et $(a'\,;b') \neq (0\,;0)$.
Une solution de ce système est un couple $(x\,;y)$ de nombres réels tel que x et y vérifient simultanément ces deux équations.

Exemple : Soit le système $\begin{cases} x + 5y = 19 \\ -2x + y = -5 \end{cases}$

- ☐

- ☐

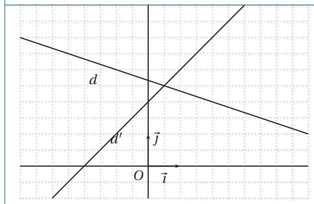
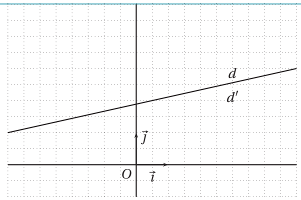
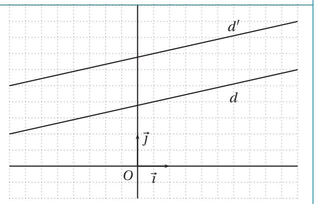
Remarque : Résoudre un système linéaire de deux équations à deux inconnues, c'est déterminer tous les couples $(x\,;y)$ solutions de ce système.

2. Interprétation graphique d'un couple solution

Un système linéaire de deux équations à deux inconnues peut s'écrire :

- ☐ Si $ab' - a'b \neq 0$.

- ☐ Si $ab' - a'b = 0$.

$ab'-a'b\neq 0$	$ab'-a'b=0$	
		
d et d' sécantes	d et d' confondues	d et d' strictement parallèles

3. Méthodes de résolution

On commence par déterminer le nombre de solutions du système.

(a) Par combinaisons

- Principes : on élimine l'une des inconnues x ou y en combinant les deux équations. Pour cela on
  - multiplie les deux membres d'une équation par un même nombre non nul ;
  - ajoute ou retranche membre à membre les deux équations.
- **Exemple.** Soit le système $(S)\ \begin{cases} 3x+4y=19 \\ -6x+y=-2 \end{cases}$

(b) Par substitution

- Principes : on exprime l'une des inconnues x ou y en fonction de l'autre, puis on l'a substitue dans la deuxième équation.
- **Exemple.** Soit le système $(S)\ \begin{cases} x+3y=15 \\ 2x+y=10 \end{cases}$

(c) Cas de systèmes avec 0 ou une infinité de solutions