Arithmétique

1. Rappels

Définition

- Les entiers naturels sont les nombres $0, 1, 2, \ldots$ Cet ensemble est noté $\mathbb{N}$.
- L'ensemble des entiers relatifs (on dit aussi l'ensemble des entiers) est formé des entiers naturels et de leurs opposés : $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ Cet ensemble est noté $\mathbb{Z}$.
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

2. Multiples et diviseurs

Définition

Soit a et b deux entiers.

- On dit que a est un multiple de b lorsqu'il existe un entier k tel que $a = kb$.
- Si de plus $b \neq 0$, on dit que b divise a ou que b est un diviseur de a.

Exemple :

- $a = 12, \; b = 3$
- $a = 10, \; b = 5$
- $a = 17, \; b = 2$

Propriété

Soit a un entier. La somme de deux multiples de a est un multiple de a.

Démonstration : (exemple de démonstration dans le cas ou $a = 5$)

□

3. Nombres pairs, nombres impairs

Définition

- Un nombre entier a est pair lorsqu'il est un multiple de 2, c'est à dire lorsqu'il existe un entier k tel que $a = 2k$.
- Un nombre entier a est impair lorsqu'il n'est pas un multiple de 2, c'est à dire lorsqu'il existe un entier k tel que $a = 2k + 1$.

Exemple :

-
-

Propriété

- Le carré d'un nombre pair est pair.
- Le carré d'un nombre impair est impair.

Démonstration :

□

Exemple : $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel.

4. Nombres premiers

Définition

- Un nombre entier naturel p est premier s'il possède exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui même.
- Un entier supérieur à 2 qui n'est pas premier et dit composé.

Exemple :

-
-
-
-

Seconde Arithmétique

Remarque :

Savoir-faire 1 **Trouver tous les diviseurs positifs d'un entier (première méthode)**

Diviseurs positifs de $n = 2\,646$.

Théorème

Tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 se décompose en un produit de nombres premiers. Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.
On écrira $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ où $n \geqslant 2$, $p_1, p_2, \dots, p_k$ sont des nombres premiers distincts et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ sont des entiers naturels non nuls.

Exemple :

Savoir-faire 2 **Trouver tous les diviseurs positifs d'un entier (deuxième méthode)**

Diviseurs positifs de $n = 2646$.

Savoir-faire 3 **Résoudre des problèmes avec des multiples et des diviseurs**

1. Montrer que la somme de trois entiers consécutifs est toujours un multiple de 3.

2. Déterminer un nombre entier n compris entre 600 et 800, qui est pair, divisible par 11 et multiple de 3 et de 5.

Savoir-faire 4 **Résoudre des problèmes avec des nombres pairs ou impairs**

1. Montrer que la somme de deux nombres impairs est un nombre pair.

2. Montrer que le produit de deux entiers consécutifs est un nombre pair.

Savoir-faire 5 **Résoudre des problèmes avec des nombres premiers**

1. Soit n un entier naturel non nul et $p=(n+1)(n+3)$. Montrer que p n'est pas premier.

2. Soit n un entier naturel supérieur à 2 et $q=(n-1)\left(n^2+7\right)$. Pour quelles valeurs de n l'entier q est-il premier ?

5. Exercices

Multiples, diviseurs, parité

1

Écrire la liste des diviseurs positifs des nombres suivants :

1. 32 **2.** 67 **3.** 81

2

Trouver tous les nombres de trois chiffres divisibles à la fois par 3 et par 5 et dont le chiffre des centaines est 7.

3

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.
Regrouper les phrases ayant la même signification :

❶ a est un diviseur de b ;

❷ a est divisible par b ;

❸ a est un multiple de b ;

❹ a divise b ;

❺ Le reste de la division de a par b est zéro.

❻ Le quotient $\dfrac{a}{b}$ est un entier.

4

Un terrain rectangulaire a des dimensions en mètres qui sont des entiers.
Déterminer ses dimensions sachant que sa largeur est un multiple de 3, que sa longueur est impaire et que son aire est de $300\ \mathrm{m}^2$.

5

Existe-t-il un entier m qui soit multiple de 14 et diviseur de 100 ?

6

Montrer que si n est un entier pair, alors $n\left(n^2+20\right)$ est multiple de 8 ;

7

Étudier la parité des nombres suivants sans effectuer de calcul :

$$15^2\ ;\ 31^2\ ;\ 46^2\ ;\ 25\times 13 \text{ et } 24\times 17.$$

8

1. Démontrer que :

(a) le cube d'un entier pair et pair.

(b) le cube d'un entier impair est impair.

2. Donner la parité des nombres suivants sans effectuer de calcul :

$$14^3\,;\ 15^3\,;\ 101^3 \text{ et } 1024^3 \times 5^3.$$

9

Montrer que la somme de deux entiers impairs consécutifs est un multiple de 4;

10

1. Déterminer le nombre de multiples de 17 compris entre 2000 et 3000;

2. Déterminer le nombre de multiples de 41 compris entre -1000 et 2000;

Nombres premiers

11

Déterminer tous les diviseurs positifs de 3^9. Quelle est leur somme ?

12

Décomposer en produit de facteurs premiers :

1. 125

2. 1080

3. 130×21^3

4. $12^5 \times 14^3$

13

Sans calculatrice, écrire les nombres suivant sous la forme $a\sqrt{b}$ où a est un entier et b un entier le plus petit possible.

1. $\sqrt{108}$

2. $\sqrt{14625}$

14

Déterminer dans chaque cas si a est un diviseur de b.

1. $a = 5^3 \times 7^2 \times 11^7 \times 13$, $b = 5^5 \times 7^2 \times 11^9 \times 13^7$.

2. $a = 3^5 \times 5^2 \times 11^2 \times 17$, $b = 3^5 \times 11^{12} \times 17^7$.

15

1. Écrire le nombre 8775 en produit de facteurs premiers.

2. Déterminer le plus petit nombre entier naturel k non nul tel que $8775k$ soit un carré parfait.

3. Même question avec un cube parfait.

16

Soient p et q deux nombres premiers distincts. On pose
$a = p^3 \times q^4$ et $b = p \times q^6$.

1. Écrire la fraction $\dfrac{a}{b}$ sous forme irréductible.

2. Écrire $\dfrac{b}{a} + \dfrac{a}{b}$ sous forme irréductible.

17

Soit n un entier naturel $n > 1$ et $N = (n-2)\left(n^2+5\right)$. Pour quelles valeurs de n, N est-il premier ?

18

Soient a et b deux entiers naturels. $a^2 - b^2$ peut-il être premier ?