Contrôle : généralités sur les fonctions

1 correction

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par $f(x) = x^2 + 2$ et $g(x) = 3x - 1$.

1. Calculer $f(2)$ et $g(-1)$.

2. Déterminer l'image de -3 par f ; celle de $\frac{1}{3}$ par g.

3. Rechercher les éventuels antécédents de :

(a) 6 par f ; **(b)** 7 par g ; **(c)** 1 par f.

2 correction

On considère trois fonctions : h définie sur $[-50;0[\cup]0;50]$, f et g définies sur l'intervalle $[-50;50]$, dont les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ sont tracées (*figure 1, page 1*).

En utilisant les représentations graphiques de f, g et h, répondre aux questions suivantes :

1. Déterminer les nombres suivants :

(a) $f(20)$;

(b) l'image de 20 par h ;

(c) l' (ou les) antécédent(s) de 40 par f.

2. Dresser, sur $[-20;20]$, le tableau des variations de la fonction f.

3. Résoudre sur $[-50;50]$ les équations ou inéquations suivantes :

(a) $f(x) \leqslant -10$;

(b) $h(x) = 20$;

(c) $h(x) \geqslant -20$.

4. Résoudre sur $[-50;50]$ l'équation $g(x) = h(x)$.

5. On propose les expressions algébriques suivantes :

$$A = \frac{200}{x} \qquad B = \frac{1}{10}x^2 - 2x - 40 \qquad C = 2x + 30.$$

Elles correspondent, dans le désordre, aux expressions de $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$.

Associer les formules A, B et C aux fonctions f, g et h et définir ainsi $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$.

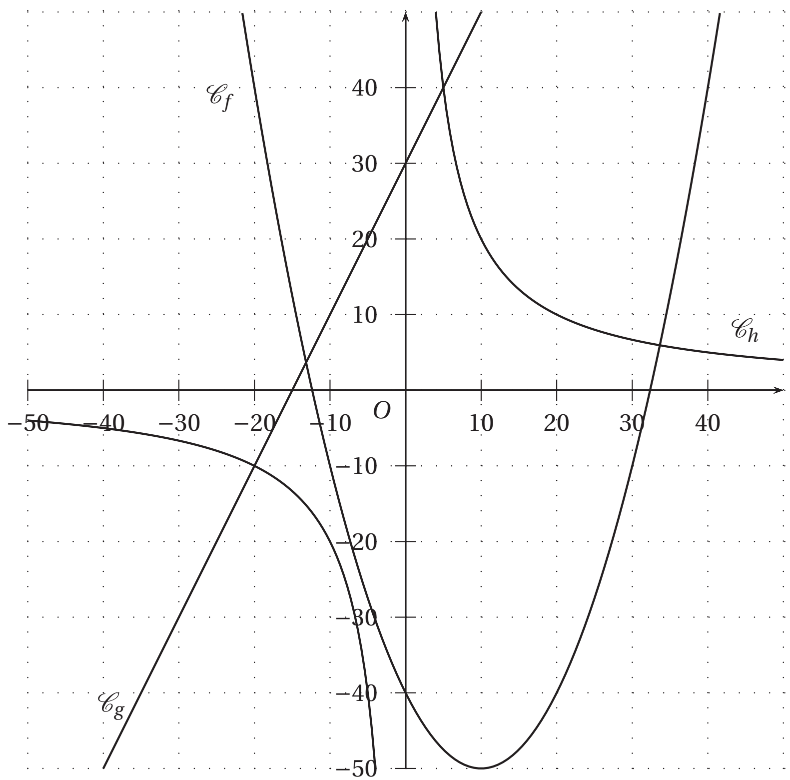

FIGURE 1 – EXERCICE 1

3 correction

1. f est la fonction définie sur $[-5;5]$ par $f(x)=\dfrac{x^4-x^2}{3}$. Montrer que f est paire.

2. f est la fonction définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{\left|x^3\right|}-x^2$. Montrer que f est paire.

3. Étudier la parité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x^4+x^2+1}{x^4+1}$.

4. Étudier la parité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{1}{|x|+1}+x$.

Correction

1 énoncé

1. $f(2)=6$, $g(-1)=-4$.

2. $f(-3)=11$, $g\left(\frac{1}{3}\right)=0$.

3. (a)
$$f(x)=6 \iff x^2+2=6 \iff x^2=4 \iff x=-2 \text{ ou } x=2$$

(b)
$$g(x)=7 \iff 3x-1=7 \iff x=\frac{8}{3}$$

(c)
$$f(x)=1 \iff x^2+2=1 \iff x^2=-1$$

Donc il n'y a pas d'antécédent car un carré est positif.

2 énoncé

1. (a) $f(20)=-40$;

(b) $h(20)=10$;

(c) $\{-20;40\}$ est l'ensemble des antécédents de 40 par f.

2.

x	-20		10		20
Var. f	40	↘	-50	↗	-40

3. (a) $f(x)\leqslant -10 \iff x\in[-10;30]$;

(b) $h(x)=20 \iff x=10$;

(c) $h(x)\geqslant -20 \iff x\in[-50;-10]\cup]0;50]$.

4. $g(x)=h(x) \iff x\in\{-20;5\}$.

5.
- $f(x)=\frac{1}{10}x^2-2x-40$;
- $g(x)=2x+30$;
- $h(x)=\frac{200}{x}$.

3 énoncé

1. $[-5;5]$ est symétrique par rapport à l'origine, de plus, pour tout $x\in[-5;5]$, $f(-x)=\frac{(-x)^4-(-x)^2}{3}=\frac{x^4-x^2}{3}=f(x)$.
f est donc paire.

2. $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ est symétrique par rapport à l'origine, de plus, pour tout $x\in]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$, $f(-x)=\frac{1}{|(-x)^3|}-(-x)^2=\frac{1}{|-x^3|}-x^2=\frac{1}{|x^3|-x^2}=f(x)$.
f est donc paire.

3. $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à l'origine, de plus, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(-x)=\frac{(-x)^4+(-x)^2+1}{(-x)^4+1}=\frac{x^4+x^2+1}{x^4+1}=f(x)$.
On en déduit que f est paire.

4. $f(1)=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$ et $f(-1)=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$.
Par conséquent $f(-1)\neq f(1)$ et $f(-1)\neq -f(1)$.
On en déduit que f n'est ni paire ni impaire.