

Contrôle : arithmétique**1** correction

1. Décomposer le nombre 1 008 en produit de facteurs premiers.
2. Écrire le nombre $\sqrt{1008}$ sous la forme $a\sqrt{7}$ où a est un nombre entier.

2 correction

1. Donner la décomposition en facteurs premiers de 60, 120 et 126.
2. En déduire :
 - (a) la liste des diviseurs positifs de 120 ;
 - (b) l'écriture de $\frac{120}{126}$ sous forme irréductible ;
 - (c) l'écriture de $\sqrt{60}$ sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b entiers, b étant le plus petit possible ;
 - (d) le plus grand diviseur commun à 120 et 126.

3 correction

Soient a et b deux entiers impairs. Montrer que $a^2 + b^2$ est un nombre pair.

4 correction

1. Déterminer le nombre de multiples de 12 compris entre 1 000 et 2 000.
2. Déterminer le nombre de multiples de 4 compris entre 10 000 et 20 000.

5 correction

Déterminer dans chaque cas si a est un diviseur de b .

1. $a = 3^5 \times 5^3 \times 7^6$, $b = 3^6 \times 5^3 \times 7 \times 5$.
2. $a = 3^4 \times 5^{13} \times 7^2$, $b = 3^9 \times 5^{15} \times 7 \times 5$.

6 correction

1. Écrire le nombre 3 528 en produit de facteurs premiers.
2. Déterminer le plus petit entier naturel k non nul tel que $3528k$ soit un carré parfait.
3. Même question avec un cube parfait.

Correction

1 énoncé

- On trouve $1008 = 2^4 \times 3^2 \times 7$.
- d'où $\sqrt{1008} = 2^2 \times 3\sqrt{7}$, soit $\sqrt{1008} = 12\sqrt{7}$.

2 énoncé

- $60 = 2^2 \times 3 \times 5$
 - $120 = 2^3 \times 3 \times 5$
 - $126 = 2 \times 3^2 \times 7$
- (a) $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 10; 12; 15; 20; 24; 30; 40; 60; 120\}$
- (b) $\frac{120}{126} = \frac{2^3 \times 3 \times 5}{2 \times 3^2 \times 7} = \frac{2^2 \times 5}{3 \times 7} = \frac{20}{21}$.
- (c) $\sqrt{60} = \sqrt{2^2 \times 3 \times 5} = 2\sqrt{15}$.
- (d) $2 \times 3 = 6$, le PGCD de 120 et 126 est 6.

3 énoncé

- Première méthode : a et b sont impairs donc leurs carrés aussi. La somme de deux nombres impairs est paire donc $a^2 + b^2$ est paire.
- Deuxième méthode : il existe deux entiers k et k' tels que $a = 2k + 1$ et $b = 2k' + 1$. On a alors :

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (2k + 1)^2 + (2k' + 1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 + 4k'^2 + 4k' + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k + 2k'^2 + 1) \end{aligned}$$

ce qui prouve que $a^2 + b^2$ est paire.

4 énoncé

- Déterminons combien d'entiers k vérifient l'inégalité :

$$1000 \leq 12k \leq 2000.$$

Comme $\frac{1000}{12} \approx 83,3$ et $\frac{2000}{12} \approx 166,7$ on en déduit que k vérifie l'inégalité :

$$84 \leq k \leq 166.$$

Il y a donc $166 - 84 + 1 = 83$ multiples de 12 compris entre 1000 et 2000.

- On procède de la même manière et on obtient 2501 multiples.

5 énoncé

- $\frac{b}{a} = \frac{3 \times 5}{7^5} \notin \mathbb{Z}$ donc a n'est pas un diviseur de b .
- $\frac{b}{a} = \frac{3^5 \times 5^3}{7} \notin \mathbb{Z}$ donc a n'est pas un diviseur de b .

6 énoncé

- $3528 = 2^3 \times 3^2 \times 7^2$.
- $k = 2$.
- $k = 3 \times 7 = 21$.