

Suites numériques

I Généralités sur les suites

1. Notion de suites

Définition

- Une suite u est une fonction définie sur \mathbb{N} (ou à partir d'un entier n_0) qui à chaque entier ($n \geq n_0$), associe un réel noté $u(n)$ ou, plus généralement, u_n .
- On note $(u_n)_{n \geq n_0}$ ou (u_n) ou u cette suite.
- u_n est appelé terme de rang n de la suite (u_n) .

Exemple :

- On définit $(u_n)_{n \geq 1}$ par u_n est le n -ième chiffre du développement décimal de π . _____

- On effectue en 2021 un placement écologique et solidaire d'un montant de 1000 € dont le rendement est de 2 % par an. _____

- On définit $(F_n)_{n \geq 0}$ par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et, pour tout $n \geq 2$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. _____

2. Différentes manière de générer une suite

(a) Par une formule explicite

On exprime u_n en fonction de n .

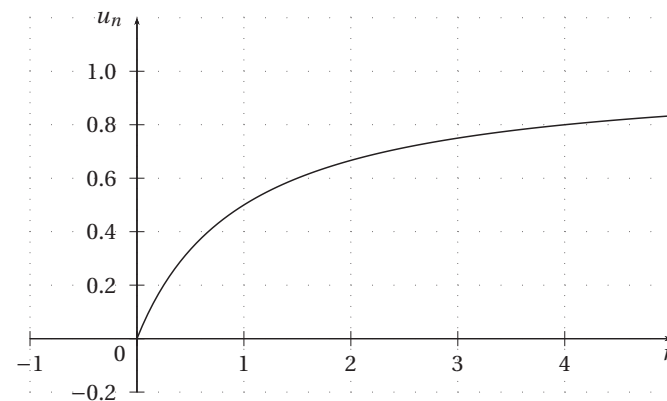
Exemple :

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par $u_n = \frac{n}{n+1}$.

On a donc _____

Représentation graphique :

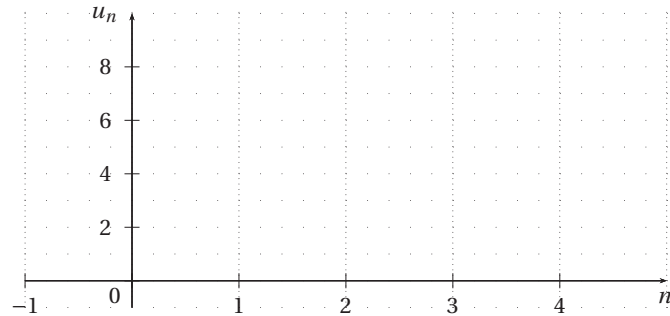
On place dans un repère les points A_n de coordonnées $(n; u_n)$.



Remarque : Si on considère $f: [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, les termes de la suite sont les ordonnées des points d'abscisses entières de la courbe \mathcal{C}_f .

- (u_n) est définie par $u_n = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair,} \\ n^2 & \text{sinon} \end{cases}$

Représentation graphique :



(b) Par une formule de récurrence

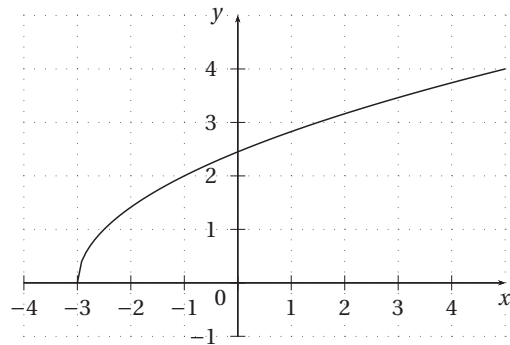
Une suite (u_n) peut être définie à partir d'un terme donné (le premier en général) et d'une relation dite de **récurrence** qui exprime le terme de rang $n + 1$ en fonction du terme de rang n .

Exemple : On pose $u_0 = -1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 6}$.

On a alors _____

Visualisation des termes sur un graphique :

On considère la fonction f définie sur $[-3; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{2x+6}$ et note \mathcal{C}_f sa représentation graphique dans un repère.



Savoir-faire 1 Utiliser une suite définie par une formule explicite

Soit (u_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = n^2 + 3n - 4$.

1. Calculer u_0 , u_1 et u_2 .

2. Exprimer u_{n+1} en fonction de n .

3. Exprimer u_{3n+2} en fonction de n .

Savoir-faire 2 Utiliser une suite définie par une formule de récurrence

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = u_n^2 + 3u_n - 4$.

1. Calculer u_1 et u_2 .

2. Exprimer u_n en fonction de u_{n-1} .

Savoir-faire 3 Écrire un algorithme qui calcule les termes d'une suite

1. Écrire des algorithmes qui calculent les n premiers termes de la suite du savoir-faire 2.

II Suites arithmétiques

1. Définition

Définition

On dit qu'une suite (u_n) est arithmétique s'il existe un nombre réel r tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

La constante r s'appelle **la raison** de la suite (u_n) .

Illustration :

Exemple :

□ Suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 1 :

□ $u_0 = -10, u_1 = -6, u_2 = -2, u_3 = 2, \dots$

Savoir-faire 4 Reconnaître une suite arithmétique

(u_n) est-elle arithmétique ?

1. $u_n = (4 - n)^2 - n^2$.

2. $u_n = n^2$

3. $u_n = 5n - 3$

2. Expression du terme de rang n

Propriété

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r .

- Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.
- Pour tous entiers naturels n et p , $u_n = u_p + (n - p)r$.

Illustration :

Démonstration :

□

Savoir-faire 5 Déterminer un terme d'une suite arithmétique

(u_n) est une suite arithmétique. Déterminer u_{10} .

1. $u_0 = 8$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 3$.

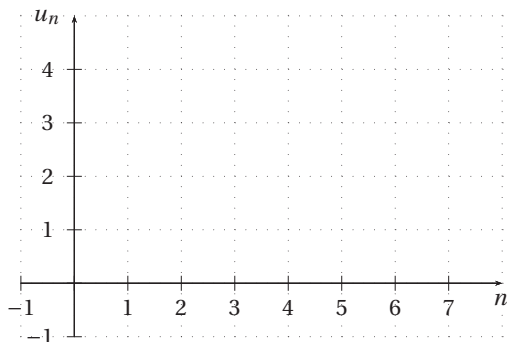
2. $u_5 = 8$ et $u_9 = 10$.

3. $u_{15} = 16$ et $r = 2$.

3. Représentation graphique

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r et A_n les points de coordonnées $(n; u_n)$ dans un repère.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$. On considère la droite d'équation $y = rx + u_0$.



4. Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique

Théorème

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Démonstration : _____

□

Exemple d'application :

Soient p et k deux entiers naturels et (u_n) une suite arithmétique de raison r . On pose

$$S = u_p + u_{p+1} + \dots + u_{p+k}.$$

Savoir-faire 6 Calculer une somme

Calculer la somme $S = 3 + 6 + 9 + 12 + \dots + 297 + 300$.

III Suite géométrique

1. Définition

Définition

On dit qu'une suite (u_n) est géométrique lorsqu'il existe un nombre réel q non nul tel que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = qu_n$.

La constante q s'appelle la raison de la suite (u_n) .

Illustration :

Exemple : $u_0 = \frac{1}{16}$, $u_1 = \frac{1}{4}$, $u_2 = 1, \dots$

Savoir-faire 7 Reconnaître une suite géométrique

Indiquer dans chaque cas si la suite (u_n) est géométrique.

1. $u_n = 3 \times 2^n$

2. $u_0 = 2$, $u_{n+1} = (3u_n + 4)^2$

2. Expression du terme de rang n **Propriété**

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q .

- Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ $u_n = u_0 \times q^n$.
- Pour tous entiers naturels p et n , $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

Illustration :

Démonstration :

Savoir-faire 8 Déterminer un terme d'une suite géométrique

Dans chaque cas déterminer u_{10} sachant que :

1. $u_0 = 8$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n$.

2. $u_5 = 6$, $u_8 = 48$.

Savoir-faire 9 Déterminer un rang à l'aide de la fonction TABLE de la calculatrice

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $u_0 = 5$.
Déterminer le rang à partir duquel $u_n \leq 0,1$.

3. Sommes des termes d'une suite géométrique

Propriété

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{R}$.

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \begin{cases} n+1 & \text{si } q = 1 \\ \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} & \text{si } q \neq 1 \end{cases}.$$

Démonstration : _____

_____ □

Exemple d'application :

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme u_0 .

On pose $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

Savoir-faire 10 Calculer une somme

Calculer $2^2 + 2^3 + \dots + 2^{20}$.

Remarque :

IV Variations d'une suite

Définition

Soit (u_n) une suite.

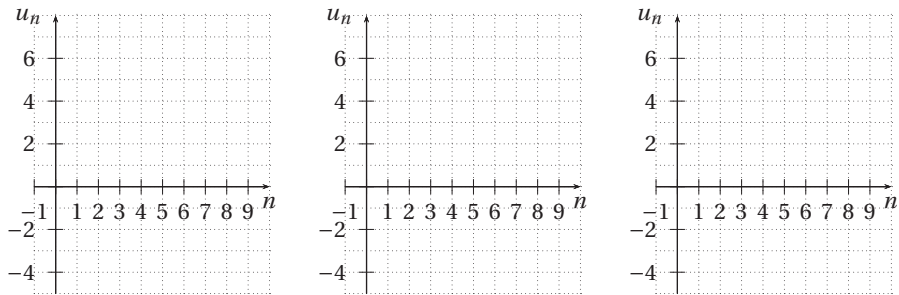
- On dit que la suite (u_n) est croissante lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$.
- On dit que la suite (u_n) est décroissante lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_{n+1}$.
- On dit qu'une suite est monotone lorsqu'elle est croissante ou décroissante.

Remarque :

- « Étudier la monotonie d'une suite (u_n) » signifie déterminer le sens de variation de (u_n) .
- Dans la pratique on étudiera le signe $u_{n+1} - u_n$.

- Il est possible de donner une définition plus fine en considérant qu'une suite peut n'être croissante (resp. décroissante) qu'à partir d'un certain rang n_0 : pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq u_{n+1}$ (resp. $u_n \geq u_{n+1}$).
- Si l'inégalité est stricte, on dit que la suite est strictement monotone (strictement croissante ou strictement décroissante).

Exemple :



Propriété

- Si pour tout entier naturel n , $u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, alors la suite (u_n) est croissante.
- Si pour tout entier naturel n , $u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, alors la suite (u_n) est décroissante.

Démonstration : _____

□

Propriété

- Soit f la fonction telle que, pour tout entier naturel n , $u_n = f(n)$.
- Si f est croissante sur $[0; +\infty[$, alors la suite (u_n) est croissante.
 - Si f est décroissante sur $[0; +\infty[$, alors la suite (u_n) est décroissante.

Démonstration : _____

□

Savoir-faire 11 Étudier la monotonie d'une suite

Dans chaque cas, étudier la monotonie de la suite (u_n)

1. $u_0 = -5$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + n^2 - 2n + 1$.

2. Pour tout entier naturel n , $u_n = (n + 1) \times 3^n$.

3. Pour tout entier naturel n , $u_n = \sqrt{3 + (-1)^n}$.

V Variations des suites arithmétiques et géométriques

Propriété

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .

- La suite (u_n) est strictement croissante si et seulement si $r > 0$.
- La suite (u_n) est strictement décroissante si et seulement si $r < 0$.
- La suite (u_n) est constante si et seulement si $r = 0$.

Démonstration : _____

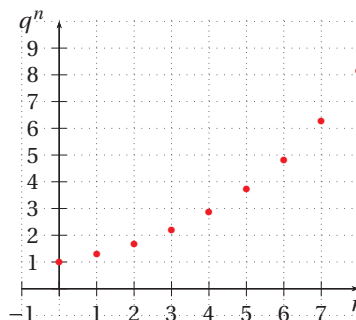
□

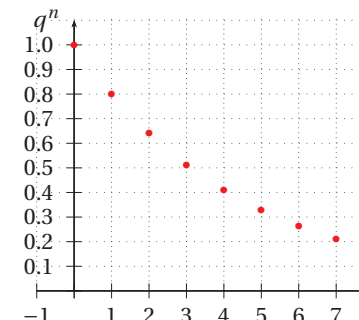
Exemple : Soit (u_n) telle que $u_n = -3n + 5$. _____

Propriété

Soit q un nombre réel non nul.

- Si $q > 1$, alors la suite (q^n) est strictement croissante.
- Si $0 < q < 1$, alors la suite (q^n) est strictement décroissante.
- Si $q = 1$, alors la suite (q^n) est constante.



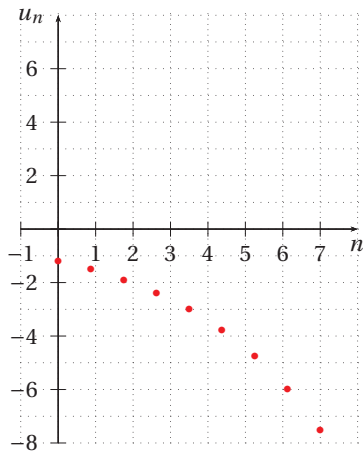
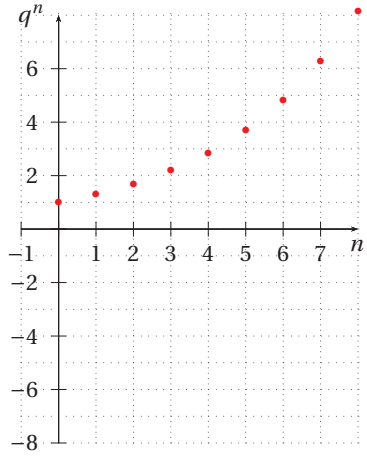


Démonstration : _____

□

Remarque : Pour déterminer le sens de variation d'une suite géométrique il faut prendre en compte le signe du premier terme.

Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = -1,2$ et de raison $q = 1,3$.



Exemple : Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = -2$ et de raison $q = 0,3$.

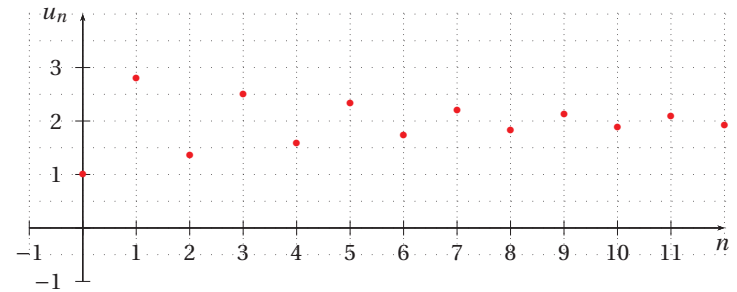
Remarque :

VI Approche de la notion de limite

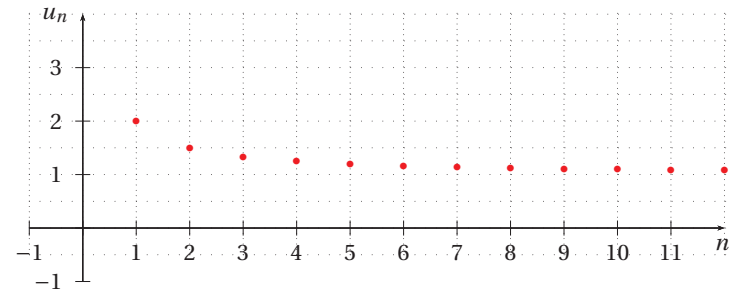
S'intéresser à la limite d'une suite (u_n) , c'est étudier le comportement des termes u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

1. Exemples de suites ayant pour limite un nombre réel

□ $u_n = 2 - (-0,8)^n$.



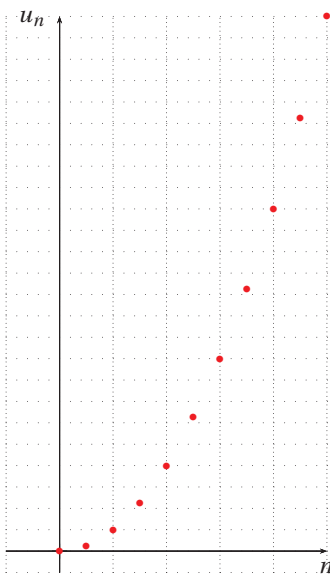
□ $u_n = 1 + \frac{1}{n}$.



Remarque : Une suite (u_n) a pour limite ℓ quand n tend vers l'infini lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang.

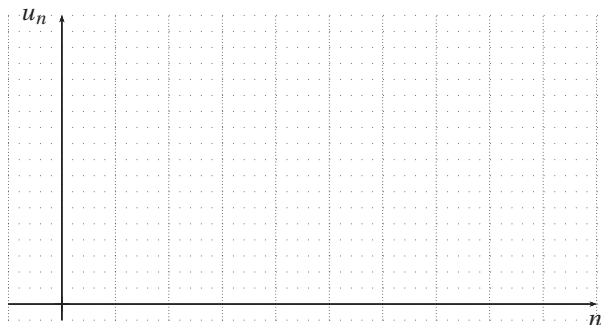
2. Exemple de suite ayant pour limite $+\infty$

$$u_n = n^2.$$



Remarque : Une suite (u_n) a pour limite $+\infty$ quand n tend vers l'infini lorsque tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$, où $A \in \mathbb{R}$, contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang.

3. Exemple de suites n'ayant pas de limite



VII Exercices

Généralités

1

Pour chacune des suites suivantes, définie sur \mathbb{N} , exprimer u_{n-1} et u_{n+1} en fonction de n .

1. $u_n = 6n + 9$

3. $u_n = \frac{3^{n+1}}{2^n}$

2. $u_n = n^2 - 2n + 8$

4. $u_n = 5^n$

2

Pour chacune des suites suivantes calculer u_1 , u_2 et u_3 .

1.
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n - 4n \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_n = nu_{n-1} + 5 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n^2 + \frac{1}{2n+1} \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = u_n^2 - (n+2) \end{cases}$$

3

On considère la fonction python ci-dessous.

1. Que calcule cette fonction ?

2. Écrire une relation entre u_{n+1} et u_n .

```

1 def fonction_mystere():
2     u=1
3     for i in range(10):
4         u=(u-1)/(u-2)
5     return(u)

```

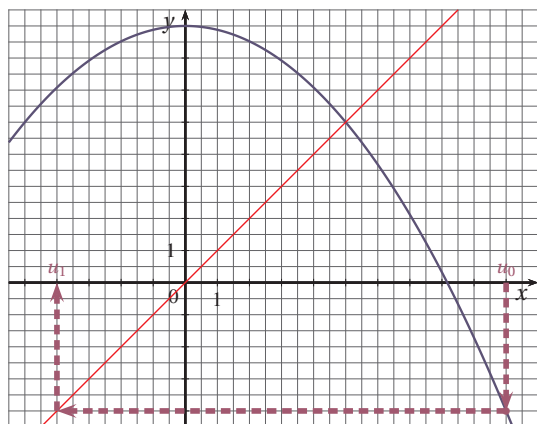
4

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 10$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 8 - 0,12 \times u_n^2$.

1. Calculer u_0 et u_1 .

2. On a tracé ci-dessous dans un repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = 8 - 0,12x^2$ et la droite \mathcal{D} d'équation $y = x$.

On a représenté sur l'axe des abscisses, les deux premiers termes de la suite (u_n) .



Construire sur l'axe des abscisses les termes u_2, u_3, u_4 et u_5 .

3. La suite (u_n) est-elle monotone ?

5

1. La suite (u_n) est définie par $u_0 = 2\sqrt{2}$ et l'algorithme suivant qui permet de calculer les termes de u_1 à u_N de la suite pour un entier N saisi par l'utilisateur.

```

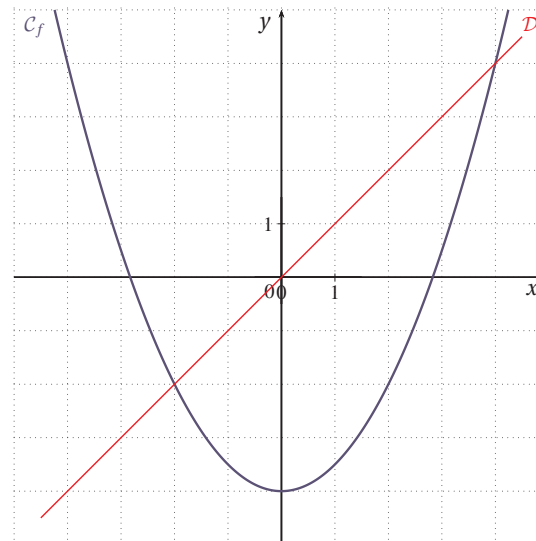
1 def suite(N):
2     u=2*sqrt(2)
3     for i in range(1,N+1):
4         u=u**2/2-4
5     return(u)
    
```

(a) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .

(b) Calculer u_1, u_2, u_3 et u_6 .

2. (v_n) est la suite définie par $v_0 = \frac{7}{2}$ et pour tout entier naturel $n, v_{n+1} = \frac{(v_n)^2}{2} - 4$.

On a tracé ci-dessous dans un repère orthonormé, la parabole C_f représentative de la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \frac{x^2}{2} - 4$ et la droite D d'équation $y = x$.



On a représenté sur l'axe des abscisses, les deux premiers termes de la suite (v_n) .

En utilisant la courbe C_f et la droite D placer sur l'axe des abscisses les termes v_1 à v_6 .

6

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = nu_n + 5$. Écrire une fonction python qui, pour $N \in \mathbb{N}$, affiche tous les termes de 0 à N .

Suites arithmétiques

7

Pour chacune des suites suivantes, calculer u_{20} .

1. La suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 3$ et $u_7 = 12$.

2. La suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 5$ et $u_{25} = 17$.

3. La suite (u_n) est définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 7 \end{cases}$

4. La suite (u_n) est définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = u_n - 4 \end{cases}$

8

Déterminer si les suites suivantes, définies pour tout $n \in \mathbb{N}$, sont arithmétiques. Si c'est le cas, donner le premier terme et la raison.

$$1. u_n = \frac{n+5}{n+1}$$

$$2. u_n = \frac{-3n+5}{8}$$

$$3. u_n = \frac{n^2+4n+3}{n+3}$$

$$4. u_n = \frac{n^2+1}{n+2}$$

9

On donne deux termes d'une suite arithmétique (u_n) définie sur \mathbb{N} . Déterminer la raison, le premier terme et exprimer u_n en fonction de n .

$$1. u_3 = 4 \text{ et } u_8 = 24.$$

$$2. u_5 = \frac{7}{4} \text{ et } u_9 = \frac{1}{4}.$$

$$3. u_{13} = 16 \text{ et } u_{32} = -7.$$

$$4. u_{50} = 159 \text{ et } u_{100} = 309.$$

10

1. Soit la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = -5$ et de raison $r = 2$.

Calculer u_{3002} .

2. Soit la suite arithmétique (v_n) de premier terme $v_2 = 1200$ et de raison $r = -10$.

Calculer v_{25} . A partir de quel rang la suite est-elle négative ?

11

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+2u_n}$.

On définit la suite (v_n) à partir de (u_n) par $v_n = \frac{1}{u_n} + 1$.

1. Montrer que la suite (v_n) est arithmétique. Préciser son premier terme et sa raison.

2. Exprimer v_n en fonction de n , puis u_n en fonction de n .

12

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{4u_n}{4-u_n}$.

On définit la suite (v_n) à partir de la suite (u_n) par la relation $v_n = \frac{3u_n+2}{u_n}$.

1. Montrer que (v_n) est arithmétique.

2. Exprimer v_n , puis u_n , en fonction de n .

13

Calculer les sommes suivantes :

$$1. S = 3 + 6 + 9 + \dots + 81$$

$$3. S = 1 + 4 + 7 + \dots + 40$$

$$2. S = 5 + 9 + 13 + \dots + 45$$

$$4. S = 1 + 2 + 3 + \dots + 73$$

14

La suite (u_n) est arithmétique de raison $-\frac{3}{2}$ et de premier terme $u_0 = 45$.

Calculer la somme $S = u_{55} + u_{56} + \dots + u_{160}$.

15

Une famille crée un compte bancaire sur lequel elle épargne de l'argent afin de pouvoir s'offrir un voyage.

La première année elle verse la somme de 500 € sur ce compte puis, chaque année, elle augmente la somme versée de 100 € (la deuxième année, elle verse donc 600 €).

Pour $n \geq 1$, on note s_n la somme versée l'année n .

1. Déterminer s_1 , s_2 et s_3 . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer s_{n+1} en fonction de s_n .

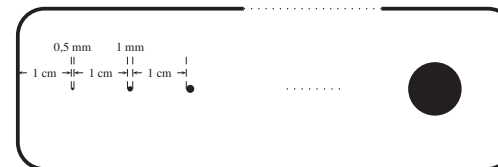
2. Donner l'expression de s_n en fonction de n .

3. Déterminer dans combien d'années la famille pourra partir en voyage, sachant que le voyage coûte 4200 €.

16

Un bricoleur s'est acheté une gamme complète de forets dont le diamètre croît de 0,5 mm en 0,5 mm. Le plus petit mesure 0,5 mm de diamètre et le plus grand 40 mm.

Pour ranger tous ses forets, il décide de percer un trou du diamètre de chaque foret dans une planche. Les trous sont alignés et sont espacés de 1 cm. Les trous extrêmes sont situés à 1 cm du bord de la planche.



Calculer la longueur de la planche.

Remarque. Toute solution qui ne considère pas la somme des termes consécutifs d'une suite ne sera pas prise en compte.

Suites géométriques

17

Pour chacune des suites suivantes, calculer u_{20} .

1. La suite (u_n) est géométrique de raison $q = 3$ et telle que $u_3 = 12$.

2. La suite (u_n) est géométrique de raison $q = -2$ et telle que $u_{31} = 32$.

3. La suite (u_n) est définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $\begin{cases} u_0 = -5 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$

4. La suite (u_n) est définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par
$$\begin{cases} u_1 = 2048 \\ u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n \end{cases}$$

18

Déterminer si les suites suivantes, définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par l'expression données, sont géométriques.

1. $u_n = \frac{4^n}{3^{n+1}}$
2. $u_n = (-7)^n$
3. $u_n = 5n + 2^n$
4. $u_n = \frac{1}{3^n}$

19

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q > 0$ et telle que $u_{35} = 2$ et $u_{37} = 2,42$. Déterminer q et u_0 puis exprimer u_n en fonction de n .

20

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q < 0$ et telle que $u_{47} = 15$ et $u_{49} = 2535$. Déterminer q et u_0 puis exprimer u_n en fonction de n .

21

(u_n) est une suite géométrique de raison q .

1. On donne $u_0 = 7$ et $q = 5$; déterminer u_4 et u_7 .
2. On donne $u_3 = 2$ et $q = \frac{1}{2}$; déterminer u_1 et u_7 .
3. On donne $u_3 = \frac{8}{3}$ et $u_5 = \frac{32}{27}$; déterminer q et u_1 . Exprimer u_n en fonction de n .
4. On donne $u_0 u_3 = 32$ et $u_0 + u_3 = 18$; déterminer les valeurs possible pour u_0 et u_3 puis exprimer u_n en fonction de n .

22

Afin de greffer 10 cm^2 de peau à une personne brûlée on lui en prélève 20 mm^2 . La culture permet d'augmenter de 15% la surface de la peau chaque jour.

1. Calculer la surface les deuxième et troisième jours.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n modélise la surface de peau le jour n ($u_1 = 20$).
 - (a) Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
 - (b) Exprimer u_n en fonction de n .
 - (c) À l'aide de la fonction TABLE de la calculatrice, déterminer dans combien de jours pourra se faire la greffe.

27

23

On utilise une feuille de papier, d'épaisseur $e = 0,5 \text{ mm}$, que l'on replie successivement en deux. Quelle est l'épaisseur de la feuille après le premier pliage ? après le deuxième ? après le $n^{\text{ème}}$?

Combien de fois faudrait-il replier cette feuille en deux pour obtenir une épaisseur supérieure à la hauteur de la tour Eiffel (environ 300 m , on pourra utiliser la fonction TABLE de la calculatrice) ?

24

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4}.$$

1. On pose, pour tout entier n : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$.
Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
2. Exprimer v_n , puis u_n en fonction de n .

25

Soit la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par son premier terme u_0 et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}$$

1. Démontrer qu'il existe une valeur de u_0 pour laquelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite constante.
2. On pose dorénavant $u_0 = 2$ et on définit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n - 1$$

Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.

3. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
4. On pose $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ et $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.
5. Exprimer S_n et S'_n en fonction de n .

26

Au cours d'une séance, un joueur de tennis s'entraîne à faire des services.

Pour tout entier naturel non nul, on note R_n l'évènement « le joueur réussit le n -ième service » et $\overline{R_n}$ l'évènement contraire.

Soit x_n la probabilité de R_n et y_n celle de $\overline{R_n}$.

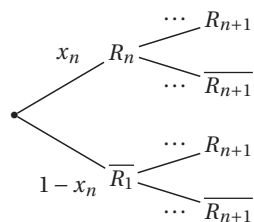
La probabilité qu'il réussisse le premier service est égale à $0,7$.

On suppose de plus que les deux conditions suivantes sont réalisées

- si le joueur réussit le n -ième service, alors la probabilité qu'il réussisse le suivant vaut $0,8$;
- si le joueur ne réussit pas le n -ième service, alors la probabilité qu'il réussisse le suivant vaut $0,7$.

1. Compléter l'arbre de probabilités suivants :

28



- Donner les probabilités conditionnelles $P_{R_n}(R_{n+1})$ et $P_{\overline{R_n}}(R_{n+1})$.
- Montrer que, pour tout entier naturel non nul n , on a : $x_{n+1} = 0,1x_n + 0,7$.
- Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul par $u_n = 9x_n - 7$.
 - Déterminer la nature de la suite (u_n) et exprimer u_n en fonction de n .
 - En déduire l'expression de x_n en fonction de n .

27

Dans chacun des cas suivants, la suite (u_n) est géométrique de premier terme u_0 et de raison q . Calculer les sommes suivantes (on pourra donner des valeurs approchées) :

- $u_0 = 10$, $q = \frac{3}{7}$.
 $S = u_0 + u_1 + \dots + u_6$.
- $u_0 = -5$, $q = \frac{3}{4}$.
 $S = u_{30} + u_{31} + \dots + u_{66}$.

28

En 2017, le nombre d'abonnés à la chaîne Youtube d'un influenceur débile était de 20000. Chaque année, le nombre d'abonnés augmente de 50%. f_n désigne le nombre d'abonnés en 2017 + n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

- Calculer le nombre d'abonnés en 2018 et en 2019.
- Exprimer f_{n+1} en fonction de f_n .
- Quelle est la nature de la suite (f_n) . En déduire une expression de f_n en fonction de n .
- Sachant qu'en Europe une heure de visionnage en flux (mot français pour l'horrible mot streaming) émet 100g d'équivalent CO_2 par heure, qu'une vidéo dure en moyenne 15 minutes, que l'influenceur poste 4 vidéos par mois, que chaque abonné regarde une fois chaque vidéo, qu'un vol aller-retour Paris New-York émet 2 tonnes d'équivalent CO_2 , calculer à combien d'allers-retours Paris New-York correspond les émissions d'équivalent CO_2 pendant 10 ans à partir de 2017 de cet influenceur.

29

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n + 2v_n}{5} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{2u_n + 3v_n}{5} \end{cases}$$

- Calculer u_1 , u_2 , v_1 et v_2 .

- On considère la suite (d_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $d_n = v_n - u_n$.
 - Montrer que la suite (d_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.
 - En déduire l'expression de d_n en fonction de n .
- On considère la suite (s_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $s_n = v_n + u_n$.
 - Calculer s_0 , s_1 et s_2 . Que peut-on conjecturer?
 - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_{n+1} = s_n$. Que peut-on en déduire?
- En déduire une expression de u_n et v_n en fonction de n .
- Déterminer en fonction de n :
 - $T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$
 - $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

30

● Résoudre les équations :

- $1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^7 = 0$
- $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \dots + \frac{1}{x^8} = 0$
- $27x^7 + 9x^5 + 3x^3 + x = 0$

31

● Soit (u_n) la suite définie par les deux premiers termes $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+2} = 1,5u_{n+1} - 0,5u_n$.

- Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_{n+1} - u_n$ est géométrique.
 - Exprimer alors v_n en fonction de n .
- Calculer en fonction de n la somme $S_n = 0,5 + (0,5)^2 + (0,5)^3 + \dots + (0,5)^n$.
 - Exprimer alors u_n en fonction de n .

Variations

32

Étudier le sens de variation des suites définies par les expressions suivantes :

- $u_n = n^2 - n + 2$
- $u_n = \frac{2^n}{3^n}$
- $u_n = \frac{3n-2}{n+1}$
- $u_n = -\frac{1}{3}n + 3$

33

Étudier le sens de variation des suites définies par les expressions suivantes :

1. $u_n = (n-5)^2$

2. $u_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$

3. $u_n = \frac{2^{n+2}}{3^n}$

4. $u_n = \frac{n^2+1}{2n}$

34

Soit a un nombre réel tel que $0 < a < 1$. On pose $u_n = (1-a)^n + (1+a)^n$.

Étudier la monotonie de la suite (u_n) .

35

On se propose de comparer les suites de termes généraux $1,5^n$ et $100n^2$. Pour cela, on pose $u_n = 1,5^n + 100n^2$.

- À l'aide de la calculatrice, montrer que $u_{28} > 0$.
- Établir que (u_n) est croissante à partir d'un rang que l'on précisera.
- En déduire que, pour $n \geq 28$, $1,5^n \geq 100n^2$.

36

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 250$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,72u_n + 420$.

- Calculer u_2 .
- Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 1500$.
 - Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
 - Exprimer v_n en fonction de n .
 - En déduire que, pour tout nombre entier naturel n , $u_n = 1500 - 1250 \times 0,72^n$.
- Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .

Partie B

Une municipalité a décidé de proposer un abonnement mensuel à un service de location de vélos.

Au mois de janvier 2018, 250 personnes se sont abonnées à ce service.

Une étude statistique a permis de modéliser l'évolution du nombre d'abonnements pour les prochains mois à l'aide de la suite (u_n) définie dans la partie A.

- On considère l'algorithme suivant :

```

U ← 250
N ← 0
Tant que U ≤ 1435
    U ← 0,72 × U + 420
    N ← N + 1
Fin Tant que
  
```

Donner une interprétation de la valeur $N = 9$ obtenue à la fin de l'exécution de cet algorithme.

- Selon ce modèle, donner une estimation du nombre d'abonnés au bout de 12 mois.
- Est-il possible d'envisager nombre d'abonnés supérieur à 2 000 ?