

Probabilités : conditionnements et dépendances

I Rappels

1. Vocabulaire

Vocabulaire	Exemples
L'expérience aléatoire C'est une expérience dont on connaît les résultats possibles (ou éventualités), mais dont on ignore lequel sera obtenu avant que l'expérience ne soit réalisée.	Dans une famille de deux enfants les résultats possibles sont : (F; G) ou (G; F) ou (G; G) ou (F; F).
L'univers Ω C'est l'ensemble formé de tous les résultats possibles.	L'univers est : $\Omega = \{(F; G); (G; F); (G; G); (F; F)\}$
Un évènement C'est un sous-ensemble de l'univers	Par exemple : $A = \{(F; G); (F; F); (G; F)\}$ On peut aussi définir A par « la famille a eu au moins une fille ».
Un évènement A est réalisé Cela signifie que le résultat obtenu est un élément du sous-ensemble A.	A est réalisé si la famille a eu (F; G).
Un évènement élémentaire C'est un évènement formé d'un unique résultat possible	Par exemple $B = \{(G; G)\}$.

2. Modélisation

(a) Loi de probabilité

On définit une loi de probabilité P sur l'univers $\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ en associant à chacun des éléments x_i de Ω un réel positif ou nul $P(x_i) = p_i$ tels que $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$. Cette loi peut être notée $(x_i; p_i)$, $1 \leq i \leq n$ ou dans un tableau :

x_1	x_2	⋯	x_n
p_1	p_2	⋯	p_n

(b) Équiprobabilité

Lorsque tous les réels p_i , $1 \leq i \leq n$, sont égaux, on est en situation d'équiprobabilité sur l'univers Ω .

On a alors pour tout $1 \leq i \leq n$, $p_i = \frac{1}{n}$.

Dans ce cas, on parle aussi de **loi équirépartie**.

Exemple : La modélisation de la naissance de deux enfants est une loi équirépartie :

x_i	(F; G)	(G; F)	(G; G)	(F; F)
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

3. Probabilité d'un évènement

(a) Définition

Soient $\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ l'univers associé à une expérience aléatoire et P une loi de probabilité $(x_i; p_i)$, $1 \leq i \leq n$ sur Ω .

□ $P(\emptyset) = 0$;

□ si $A \neq \emptyset$, $P(A) = \sum_{x_i \in A} p_i$.

Le réel $P(A)$ est appelé probabilité de l'évènement A.

Exemple : On considère un dé truqué dont la loi de probabilité est donnée dans le tableau suivant :

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	0,1	0,1	0,1	0,2	0,2	0,3

Déterminons la probabilité d'obtenir un nombre pair

(b) Propriétés

(i) $P(\Omega) =$ _____

Remarque :

- Un système complet d'événements (langage des probabilités) est **une partition de Ω** (langage des ensembles).
- Les événements A_1, A_2, \dots, A_n de probabilité non nulle forment un système complet d'événements lorsque $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$ et pour tous $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n, A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$.

(a) Avec trois événements

Soient A, B et C trois événements qui forment un système complet d'événements de l'univers Ω , c'est à dire tels que :

- $\Omega =$ _____
- _____
- _____
- _____

et F un événement quelconque.

$P(F) =$ _____

Donc $P(F) =$ _____

(b) Généralisation

Théorème

Soient A_1, A_2, \dots, A_n un système complet d'événements de l'univers Ω .
 Pour tout événement F de l'univers Ω :

$$P(F) = P(F \cap A_1) + \dots + P(F \cap A_n)$$

$$= P(A_1)P_{A_1}(F) + \dots + P(A_n)P_{A_n}(F)$$

Exemple : _____

III Exercices

Révisions

1

Dans une classe de 35 élèves de seconde, 20 élèves jouent au foot, 15 font du judo. 3 pratiquent les deux sports.

On interroge un élève au hasard parmi les 35 de la classe.

On note F l'événement « l'élève interrogé joue au foot » et J l'événement « l'élève interrogé fait du judo ».

1. Décrire par une phrase les événements $F \cap J, F \cup J, \bar{F}$ et $\overline{F \cup J}$.

2. (a) Déterminer la probabilité de l'événement J

(b) Déterminer la probabilité de l'événement $J \cup F$

2

Un magasin fait des promotions sur des tulipes et des jacinthes. Ces fleurs sont de couleur blanche, rouge ou jaune. Le magasin met en vente 500 fleurs.

25 % sont des jacinthes, 30 % sont des fleurs blanches. Il y a 250 fleurs rouges et parmi elles, 20 % sont des jacinthes. Le quart des fleurs jaunes sont des tulipes.

On choisit une fleur au hasard parmi ces 500 fleurs. Déterminer les probabilités de chacun des événements suivants :

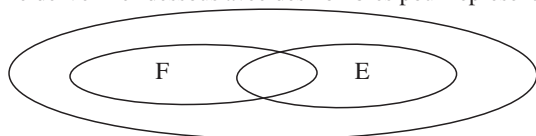
1. J : « on obtient une jacinthes » ;
2. B : « on obtient une fleur blanche » ;
3. T : « on obtient une tulipe » ;
4. R : « on obtient une fleur rouge » ;
5. C : « on obtient une fleur rouge ou une tulipe » ;
6. E : « la fleur obtenu est rouge ou blanche ».

3

Une campagne de prévention routière s'intéresse aux défauts constatés sur le freinage et sur l'éclairage de 400 véhicules :

- 60 des 400 véhicules présentent un défaut de freinage.
- 140 des 400 véhicules présentent un défaut d'éclairage.
- 45 véhicules présentent à la fois un défaut de freinage et un défaut d'éclairage.

1. Compléter le diagramme de Venn ci-dessous avec des nombres pour représenter la situation.



2. On choisit un véhicule au hasard parmi ceux qui ont été examinés. Quelle est la probabilité que :

- (a) le véhicule présente un défaut de freinage mais pas de défaut d'éclairage ?
- (b) le véhicule présente un défaut d'éclairage mais pas de défaut de freinage ?
- (c) le véhicule ne présente aucun des deux défauts ?
- (d) le véhicule présente au moins un des deux défauts ?

4

Voici les résultats d'un sondage effectué en 1999 auprès de 2 000 personnes, à propos d'Internet :

- 40% des personnes interrogées déclarent être intéressées par Internet,

9

- 35% des personnes interrogées ont moins de 30 ans et, parmi celles-ci, quatre cinquièmes déclarent être intéressées par Internet,
- 30% des personnes interrogées ont plus de 60 ans et, parmi celles-ci, 85% ne sont pas intéressées par Internet.

1. Reproduire et compléter le tableau suivant :

	intéressées par Internet	non intéressées par internet	total
moins de 30 ans			
de 30 à 60 ans			
plus de 60 ans			
total			2 000

2. On choisit au hasard une personne parmi les 2 000 interrogées. On suppose que toutes les personnes ont la même probabilité d'être choisies. On considère les événements :

A : « la personne interrogée a moins de 30 ans »,

B : « la personne interrogée est intéressée par Internet ».

(a) Calculer les probabilités $P(A)$ et $P(B)$.

(b) Définir par une phrase l'événement \bar{A} puis calculer $P(\bar{A})$.

(c) Définir par une phrase l'événement $A \cap B$ puis calculer $P(A \cap B)$. En déduire $P(A \cup B)$.

3. On sait maintenant que la personne interrogée est intéressée par Internet.

Quelle est la probabilité qu'elle ait plus de 30 ans ?

Probabilité conditionnelles

5

On a demandé à 180 élèves s'ils étaient demi-pensionnaires ou interne ainsi que la langue vivante étudiée hormis l'anglais (allemand ou espagnol). On choisit un élève au hasard.

On note A l'événement « l'élève apprend l'allemand », E l'événement « l'élève apprend l'espagnol » et I l'événement « l'élève est interne ».

1. Compléter le tableau suivant :

	Allemand	Espagnol	Total
DP			100
Interne		50	
Total	40		180

2. (a) Calculer $P(A)$ et $P(A \cap I)$.

(b) En déduire $P_A(I)$ et interpréter le résultat par une phrase.

3. Calculer la probabilité d'obtenir un élève interne sachant qu'il apprend l'espagnol.

10

6

On suppose que A et B sont deux événements de probabilité non nulle.

Établir que $P_A(B) \times \left(\frac{1}{P_B(A)} - 1 \right) = \frac{P(A \cup B)}{P(A)} - 1$.

7

Soit A et B deux événements tels que $P_A(B) = 0,8$, $P_B(A) = 0,6$ et $P(A) = 0,4$.

- Calculer $P(A \cap B)$.
- En déduire $P(B)$.
- Calculer alors $P(A \cup B)$.

8

Vincent et Anne sont haltérophiles. La probabilité que Vincent soulève plus de 100 kg est égale à 0,75, alors que la probabilité qu'Anne soulève plus de 100 kg est égale à 0,6. La probabilité qu'au moins l'un des deux soulève plus de 100 kg est égale à 0,85.

- Quelle est la probabilité qu'ils soulèvent plus de 100 kg tous les deux ?
- Vincent vient de soulever plus de 100 kg. Quelle est la probabilité qu'Anne y arrive aussi ?

Indépendance

9

A et B sont deux événements tels que : $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ et $P(A \cup B) = \frac{1}{6}$. Sont-ils indépendants ?

10

A et B sont deux événements tels que : $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,7$ et $P_A(B) = 0,3$. Sont-ils indépendants ?

11

A et B sont deux événements indépendants tels que : $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,5$. Calculer $P(A \cup B)$.

12

Soient A et B deux événements incompatibles de probabilité non nulle. Démontrer que A et B ne sont pas indépendants.

13

On considère deux événements A et B tels que $P(A \cap B) = 0,8$ et $P(A \cup B) = 0,9$.
 A et B peuvent-ils être indépendants ?

14

On considère deux événements A et B tels que $P(A) = p$, $P(B) = P(\bar{A})$ et $P(A \cap B) = 0,2p + 0,15$. Déterminer les valeurs de p telles que A et B soient indépendants.

Probabilités totales

15

Un piéton arrive à un passage protégé. D'après une étude statistique, on établit que le feu piéton est vert avec une probabilité de 0,45. Si le feu est vert, alors le piéton s'engage sur le passage avec une probabilité de 0,9. Sinon, il s'engage avec une probabilité de 0,3.

- Représenter cette situation par un arbre de probabilité et le compléter entièrement.
- Calculer la probabilité que le piéton s'engage sur le passage protégé.

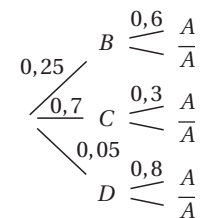
16

Dans une crèche, chaque matin, un enfant fait la sieste avec une probabilité de 0,7. Si il a fait la sieste le matin, il fera à nouveau la sieste avec une probabilité de 0,2. Sinon, il fera la sieste l'après-midi avec une probabilité de 0,9.

- Représenter cette situation par un arbre de probabilité que l'on complètera entièrement.
- Calculer la probabilité qu'elle ne fasse pas du tout la sieste dans la journée.
- Calculer la probabilité qu'elle fasse la sieste l'après-midi.

17

L'arbre ci-dessous modélise une expérience aléatoire où A , B , C et D sont quatre événements.



- Compléter le tableau à double entrée ci-dessous puis en déduire $P(A)$.

	B	C	D	Total
A				
\bar{A}				
Total				1

- Retrouver ce résultat sans utiliser le tableau.

18

Sophie a mis des dragées dans une boîte, les unes contiennent une amande, les autres n'en contiennent pas.

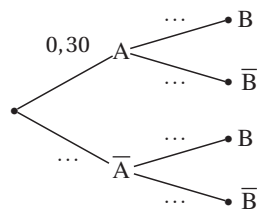
- 30 % des dragées contiennent une amande ;
- 40 % des dragées avec amande sont bleues, les autres sont roses ;
- 75 % des dragées sans amande sont bleues, les autres sont roses.

Sophie choisit au hasard une dragée dans la boîte. On admet que toutes les dragées ont la même probabilité d'être choisies.

On note :

- A l'évènement « La dragée choisie contient une amande » ;
- \bar{A} désigne l'évènement contraire de l'évènement A ;
- B est l'évènement « La dragée choisie est bleue ».

1. Déterminer la probabilité de l'évènement A.
2. Compléter l'arbre de probabilités ci-dessous.
3. Décrire l'évènement $A \cap B$ par une phrase. Montrer que sa probabilité est égale à 0,12 .
4. Compléter le tableau de probabilités ci-dessous.
5. Sachant que Sophie choisit une dragée bleue, quelle est la probabilité, que cette dragée contienne une amande ? Arrondir la réponse à 0,01 .
6. Les évènements A et B sont-ils indépendants ?



	Bleu	Rose	Total
Avec amande	0,12		
Sans amande			
Total			1

19

À un croisement, se trouve un feu tricolore dont les feux sont alternativement vert, rouge ou orange avec des probabilité respectives de 0,4, 0,5 et 0,1. Des cyclistes empruntent régulièrement ce croisement et une étude statistique à permis de déterminer les résultats suivant :

- Si le feu est vert, le cycliste passe avec une probabilité de 1 ;
- Si le feu est orange, le cycliste passe avec une probabilité de 0,1 ;
- Si le feu est rouge, le cycliste passe avec une probabilité de 0,02 ;

1. Représenter la situation par un arbre de probabilité.
2. Calculer la probabilité que le cycliste ne s'arrête pas au feu tricolore.
3. Calculer la probabilité que le feu soit vert sachant que le cycliste ne s'est pas arrêté au feu.