

## Second degré

### I Définition

#### Définition

On appelle fonction polynôme du second degré, ou fonction trinôme du second degré, toute fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  dont l'expression peut s'écrire :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des réels avec  $a \neq 0$ .

#### Exemple :

□  $f : x \mapsto x^2$  \_\_\_\_\_

□  $f : x \mapsto 4x^2 + 5x - 7$  \_\_\_\_\_

□  $f : x \mapsto 4(x-2)^2 + 5 - 4x^2$  \_\_\_\_\_

□  $f : x \mapsto -3(x-1)(2+x)$  \_\_\_\_\_

□  $f : x \mapsto (x+1)^3 - x^3$  \_\_\_\_\_

**Remarque :** Au lieu de parler de fonction polynôme du second degré ou de fonction trinôme du second degré  $x \mapsto ax^2 + bx + c$  on dit, plus simplement, polynôme  $ax^2 + bx + c$  ou trinôme  $ax^2 + bx + c$ .

## II Trois formes particulières pour l'expression d'un trinôme du second degré

### 1. Forme développée (ou réduite)

C'est la forme qu'on a utilisé pour définir les fonctions polynômes du second degré :

$$ax^2 + bx + c, a \neq 0.$$

### 2. Forme canonique

Cette forme a été présentée en seconde.

#### Propriété

#### et définition

Toute fonction polynôme du second degré définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

peut s'écrire de manière unique sous la forme

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

où

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = -\frac{\Delta}{4a}.$$

Le nombre réel  $\Delta = b^2 - 4ac$  est appelé **discriminant** de  $f$ .

Cette écriture est appelée **forme canonique** de  $f$ .

*Démonstration :* \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_ □

**Exemple :** Mettre sous forme canonique le trinôme suivant :  $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$ .

□ Méthode directe : \_\_\_\_\_

---



---



---



---



---

□ Avec les formules : \_\_\_\_\_

---



---



---



---



---

### 3. Forme factorisée

Cette forme n'existe pas toujours et fera l'objet d'une étude détaillée plus loin dans ce chapitre.  
Voici un exemple, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = 2(x-1)(x+2).$$

---



---

### Savoir-faire 1 Utiliser un logiciel de calcul formel

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{\sqrt{578}}{56}x^2 + \frac{89}{\sqrt{3}}x + 7895$ . À l'aide un logiciel de calcul formel,

1. mettre  $f(x)$  sous forme canonique ;

---



---



---

2. Résoudre l'équation  $f(x) = 0$ .

---

### Savoir-faire 2 Passer de la forme canonique à la forme factorisée

Mettre les trinôme suivants sous forme factorisée : \_\_\_\_\_

1.  $f(x) = -3(x-4)^2 + 27$  \_\_\_\_\_

---

2.  $f(x) = -2(x+1)^2 - 8$  \_\_\_\_\_

---

3.  $x \mapsto 3(x+2)^2$  \_\_\_\_\_

---



□  $-2x^2 - 4x - 10 = 0$  \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

□  $x^2 - 2x - 2 = 0$  \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

□  $2x^2 + 5x = 0$  \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

□  $5x^2 - 30x + 45 = 0$  \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

## 2. Conséquences : signe de $f(x) = ax^2 + bx + c$ , $a \neq 0$

□ 1<sup>er</sup> cas :  $\Delta > 0$  \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

$x$	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$
$a$				
$x - x_1$				
$x - x_2$				
$a(x - x_1)(x - x_2)$				

□ 2<sup>e</sup> cas :  $\Delta = 0$  \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

□ 3<sup>e</sup> cas :  $\Delta < 0$  \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

**Propriété**

Soit  $f$  la fonction trinôme du second degré définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

(**sgn.** signifie **signe de** )

Signe de $\Delta$	Tableau	$a > 0$	$a < 0$										
Si $\Delta > 0$	<table border="1"> <tr> <td><math>x</math></td> <td><math>-\infty</math></td> <td><math>x_1</math></td> <td><math>x_2</math></td> <td><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td><b>sgn.</b> <math>f(x)</math></td> <td><b>sgn.</b> <math>a</math></td> <td>0</td> <td><b>sgn.</b> <math>-a</math></td> <td><b>sgn.</b> <math>a</math></td> </tr> </table>	$x$	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$	<b>sgn.</b> $f(x)$	<b>sgn.</b> $a$	0	<b>sgn.</b> $-a$	<b>sgn.</b> $a$		
$x$	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$									
<b>sgn.</b> $f(x)$	<b>sgn.</b> $a$	0	<b>sgn.</b> $-a$	<b>sgn.</b> $a$									
Si $\Delta = 0$	<table border="1"> <tr> <td><math>x</math></td> <td><math>-\infty</math></td> <td><math>x_0</math></td> <td><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td><b>sgn.</b> <math>f(x)</math></td> <td><b>sgn.</b> <math>a</math></td> <td>0</td> <td><b>sgn.</b> <math>a</math></td> </tr> </table>	$x$	$-\infty$	$x_0$	$+\infty$	<b>sgn.</b> $f(x)$	<b>sgn.</b> $a$	0	<b>sgn.</b> $a$				
$x$	$-\infty$	$x_0$	$+\infty$										
<b>sgn.</b> $f(x)$	<b>sgn.</b> $a$	0	<b>sgn.</b> $a$										
Si $\Delta < 0$	<table border="1"> <tr> <td><math>x</math></td> <td><math>-\infty</math></td> <td><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td><b>sgn.</b> <math>f(x)</math></td> <td colspan="2"><b>sgn.</b> <math>a</math></td> </tr> </table>	$x$	$-\infty$	$+\infty$	<b>sgn.</b> $f(x)$	<b>sgn.</b> $a$							
$x$	$-\infty$	$+\infty$											
<b>sgn.</b> $f(x)$	<b>sgn.</b> $a$												

### 3. Somme et produit des racines

**Propriété**

Soit  $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$  une fonction trinôme du second de degré qui admet deux racines  $x_1$  et  $x_2$ , éventuellement confondues ( $\Delta \geq 0$ ).

Si  $s$  et  $p$  sont la somme et le produit des racines, alors

- $s = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$  ;
- $p = x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ .

Démonstration : \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

**Propriété**

Deux réels ont pour somme  $s$  et produit  $p$  si, et seulement si, ils sont racines de l'équation  $x^2 - sx + p = 0$ .

Démonstration : \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

**Savoir-faire 4 Résoudre une inéquation du second degré**

Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'inéquation

$$\frac{-3x^2 + 3x + 6}{x^2 - 4x + 2} \geq 0.$$

\_\_\_\_\_



3

Développer puis réduire chaque expression.

1.  $A = (x-5)^2$
2.  $B = 2(7x-1)^2$
3.  $C = \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{4}a\right)^2$

4

Développer puis réduire chaque expression.

1.  $A = (8-3x)(3x-8)$
2.  $B = \left(\frac{3}{2}x-1\right)\left(-1-\frac{3}{2}x\right)$
3.  $C = \left(\frac{1}{2}x-1\right)^2 - (2x-1)(2x+1)$

5

Factoriser chaque expression.

1.  $A = x^2 + 2x + 1$
2.  $B = 4x^2 + 4x + 1$
3.  $C = 9x^2 - 12x + 4$
4.  $D = 49x^2 - 42x + 9$
5.  $E = 16x^2 - 9$

6

Factoriser chaque expression.

1.  $A = 36x^2 + 84x + 49$
2.  $B = (2x-1)^2 - \left(\frac{1}{2}x+1\right)^2$
3.  $C = (3x+1)^2 - (5x-2)^2$

7

Factoriser en plusieurs étapes.

1.  $A = 5x^4 - 45x^2$
2.  $B = x^5 + 4x^4 + 4x^3$
3.  $C = 25x^2 - 4 + (5x+2)(4x-7)$

8

Factoriser en plusieurs étapes.

1.  $A = x^2(x-4) + 2x(x-4) + (x-4)$
2.  $B = (x+1)^2 + x^2 - 1$

## Trinômes du second degré

9

Les fonctions suivantes sont-elles des fonctions trinôme du second degré ?

1.  $f: x \mapsto 2(x+3)^2$
2.  $f: x \mapsto (2x-5)^2 - 4x^2$
3.  $f: x \mapsto x^2 + 2x + (1-x)(x-2)^2$

10

On pose  $f(x) = x^2 - 3x + 2$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

1. Le nombre 0 est-il solution de  $f(x) = 0$  ?
2. Le nombre 1 est-il solution de  $f(x) = 0$  ?
3. Donner toutes les solutions de  $f(x) = 0$ .

11

Résoudre les équations suivantes.

- |                   |                    |
|-------------------|--------------------|
| 1. $x^2 - 16 = 0$ | 4. $4x^2 = 12$     |
| 2. $2x^2 + 1 = 0$ | 5. $x^2 - x = 0$   |
| 3. $2x^2 = 18$    | 6. $4x^2j - 1 = 0$ |

12

Écrire les trinômes du second degré suivants sous forme canonique.

- |                        |                            |
|------------------------|----------------------------|
| 1. $A(x) = 2x^2 + 4x$  | 3. $C(x) = 5x^2 - 15x + 5$ |
| 2. $B(x) = -3x^2 - 6x$ | 4. $D(x) = 3x^2 - 6x + 12$ |

13

Écrire les trinômes du second degré suivants sous forme canonique.

- |                                    |                           |
|------------------------------------|---------------------------|
| 1. $A(x) = \frac{1}{3}x^2 - x - 1$ | 3. $C(x) = <+>$           |
| 2. $B(x) = -x^2 + \sqrt{3}x + 3$   | 4. $D(x) = 2x^2 + 8x - 6$ |

## Équations du second degré

14

Résoudre les équations suivantes :

1.  $3x^2 + 22x - 25 = 0$

2.  $2x^2 - 12x + 18$

15

Déterminer les racines des trinômes suivants :

1.  $2x^2 + 3x - 2 = 0$

2.  $8x^2 - 2x - 1 = 0$

16

Résoudre les équations suivantes en calculant leur discriminant uniquement si c'est nécessaire.

1.  $x^2 + 6x = 0$

2.  $3x^2 + 4 = 0$

3.  $2x^2 - 8 = 0$

4.  $3x^2 - 8 = 0$

5.  $2x^2 - 2x + 6 = 0$

3.  $x^2 - x + 6 = 0$

4.  $3x^2 + 4x - 1 = 0$

3.  $3x^2 - 4x + 1 = 0$

4.  $\frac{1}{3}x^2 + x - 6 = 0$

6.  $x^2 + 2x + 1 = 0$

7.  $(2x - 1)(x + 4) = 0$

8.  $\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} = 0$

9.  $x^2 - 16 + 2(x - 4) = 0$

10.  $x^2 + (4 + x)^2 = 0$

17

Résoudre les équations suivantes :

1.  $\frac{2x^2 + 3x - 5}{x - 1} = 0$

2.  $x - \frac{1}{x} = 3$

3.  $\frac{1}{x - 1} - \frac{4}{x + 2} = -\frac{5}{3}$

4.  $\frac{3}{x + 2} - \frac{1}{x^2 - 4} = \frac{1}{2}$

18

Soit  $m$  un réel non nul. On considère l'équation  $mx^2 + x + 1 = 0$ . Pour quelles valeurs de  $m$  cette équation admet-elle une racine double ?

19

Soit  $m$  un nombre réel. On considère l'équation  $2x^2 + x + m - 1 = 0$ .1. Déterminer l'expression du discriminant en fonction de  $m$ .2. En déduire, en fonction de  $m$ , le nombre de solution de cette équation.

15

20

**Équation bicarrée**Résolution de l'équation  $(E) : x^4 - 11x^2 + 18 = 0$ .1. On pose  $X = x^2$ . Montrer que  $x$  est solution de  $(E)$  si et seulement si  $X$  est solution de l'équation  $(E') : X^2 - 11X + 18 = 0$ .2. Résoudre  $(E')$ .3. En déduire les solutions de  $(E)$ .**Inéquations**

21

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes :

1.  $x^2 - 3x + 1 < 0$

2.  $2x^2 + 5x - 7 \geq 0$

3.  $9x^2 + 12x + 4 > 0$

4.  $3x^2 - x + 1 \leq 0$

22

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes :

1.  $\frac{3x^2 + x - 2}{x - 2} < 0$

2.  $\frac{-x + 4}{3x - 5} \geq \frac{2x - 1}{4x + 5}$

23

Donner le domaine de définition des fonctions suivantes :

1.  $f: x \mapsto \frac{3}{x\sqrt{7x^2 - 2x - 5}}$

2.  $g: x \mapsto \sqrt{\frac{x}{3x^2 - 13x + 4}}$

**Factorisations**

24

Factoriser si possible les trinômes suivants en un produit de deux polynômes de degré 1.

1.  $3x^2 - 6x - 9$

2.  $-x^2 - 12x + 28$

3.  $-x^2 + 5x - 10$

4.  $3x^2 + \sqrt{2}x + 6$

16

25

- Factoriser, en un produit de trois polynômes de degré 1, le polynôme  $P(x) = 4x^3 - 5x^2 - 9x$ .
- Résoudre l'équation  $P(x) = 0$ .

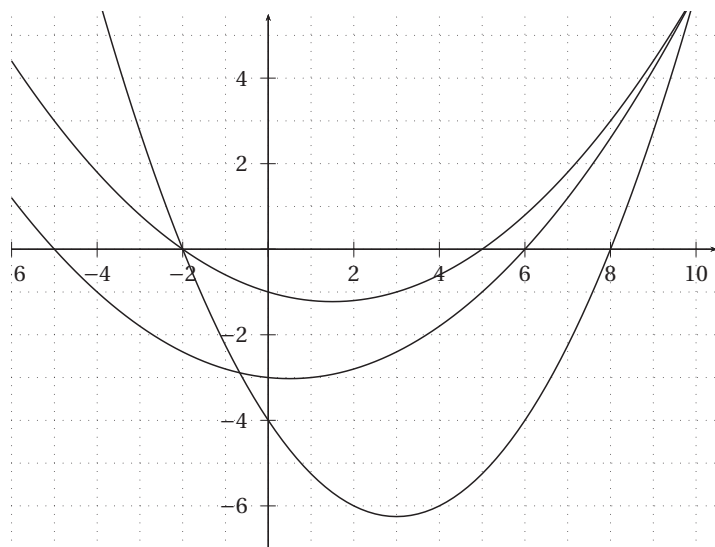
26

Soit  $(E)$  l'équation  $x^3 + 5x^2 - x - 5 = 0$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $A(x) = x^3 + 5x^2 - x - 5$ .

- Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $A(x) = (x+1)^3 + 2(x^2 - 2x - 3)$ .
- Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $B(x) = x^2 - 2x - 3$ . Factoriser  $B(x)$ .
- Résoudre l'équation  $(E)$ .

27

On donne ci-dessous les courbes représentatives de trois fonctions trinômes du second degré  $f$ ,  $g$  et  $h$ .



- En utilisant les formes factorisées déterminer les expressions de ces trois fonctions.
- Les courbes représentatives de ces fonctions ont-elles un point commun? Si oui, déterminer ses coordonnées.

### Somme et produit des racines

28

Pour chaque équation, déterminer une solution évidente et en déduire l'autre sans calculer le discriminant.

17

1.  $2x^2 + x - 3 = 0$

2.  $3x^2 + 10x + 7 = 0$

3.  $x^2 + (\sqrt{3} - 1)x - \sqrt{3} = 0$

4.  $x^2 + 4\sqrt{5}x - 25 = 0$

29

Écrire une équation de la forme  $x^2 + px + q = 0$  dont les solutions soient :

1. 2 et 3;

2.  $\frac{1}{4}$  et  $\frac{1}{3}$ ;

3. 4 et  $\frac{1}{4}$ ;

4.  $\sqrt{2}$  et  $\sqrt{3}$ ;

5.  $\sqrt{3} - 1$  et  $\sqrt{3} + 1$ ;

6.  $\sqrt{5} - 1$  et  $\frac{1}{\sqrt{5} - 1}$ .

30

Déterminer, s'ils existent, deux réels  $u$  et  $v$  connaissant leur somme  $S$  et leur produit  $P$  dans les cas suivants :

1.  $S = 1$  et  $P = 1$ ;

2.  $S = -7$  et  $P = -10$ ;

3.  $S = \pi + 1$  et  $P = \pi$ ;

4.  $S = \sqrt{3} + \sqrt{2}$  et  $P = \sqrt{6}$ ;

5.  $S = 0$  et  $P = 1$

31

Résoudre les systèmes suivants :

1. 
$$\begin{cases} x + y = 7 \\ xy = -10 \end{cases}$$

2. 
$$\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 1 \end{cases}$$

3. 
$$\begin{cases} x - y = 6 \\ xy = 16 \end{cases}$$

32

Trouver deux nombres dont la somme est 10 et le produit 13.

33

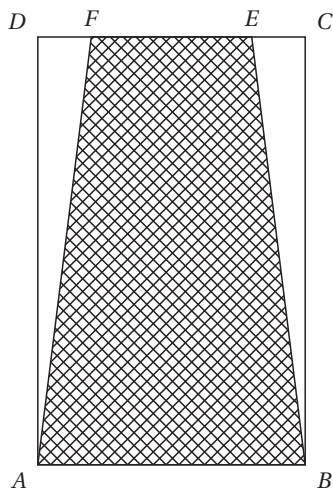
Existe-t-il une valeur du réel  $a$  pour laquelle l'équation d'inconnue  $x$  :  $x^2 + ax + 3 = 0$  admet 2 comme solution? Si oui, préciser l'autre solution.

18

## Problèmes (enfin des math ?)

34

On dessine, dans un rectangle  $ABCD$ , un trapèze  $ABEF$  hachuré tel que  $AD = EF + 20$  et  $AB = 30$ . Quelle est la valeur minimale à donner à la distance  $EF$  pour que le trapèze ait une aire supérieure au neuf dixième de l'aire du rectangle ?



35

Résoudre les systèmes suivants :

$$1. \begin{cases} x - y = 15 \\ x^2 + y^2 = 117 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x + y = 3 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 4(x^2 + y^2) = 25 \\ xy = -3 \end{cases}$$

36

Déterminer dans chacun des cas suivants les dimension du triangle rectangle considéré.

1. L'aire est égale à 30, l'hypoténuse est égale à 13;
2. l'aire est égale à 60, le périmètre est égal à 84;
3. L'hypoténuse est égale à 35, le périmètre est égal à 84.

37

On doit partager de manière égale une somme de 30000 € entre un certain nombre de personnes. S'il y avait 4 personnes de moins, la part de chacun serait augmentée de 1250 €. Combien sont-ils ?

38

Dans un carré de 10 cm de coté, on a coloré une bande de largeur  $x$  cm et un carré de coté  $x$  cm centré comme sur la figure ci-dessous. Déterminer pour quelles valeurs  $x$ , l'aire de la partie colorée est inférieure à l'aire de la partie blanche.

