

# Trigonométrie

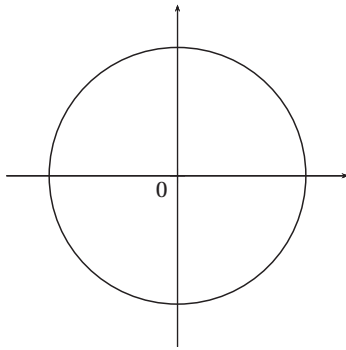
## I Cercle trigonométrique

$(O; \vec{i}, \vec{j})$  est un repère orthonormé.  $I$  et  $J$  sont les points tels que  $\vec{OI} = \vec{i}$  et  $\vec{OJ} = \vec{j}$ .

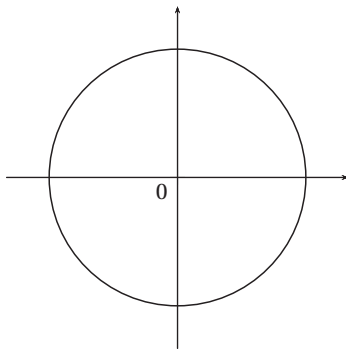
### 1. Définition

#### Définition

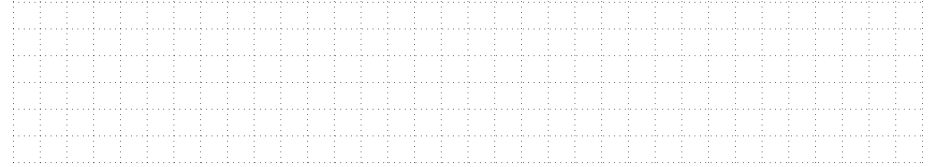
Dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , on appelle **cercle trigonométrique** le cercle de centre  $O$ , de rayon 1, orienté dans le sens direct (le sens inverse des aiguilles d'une montre) et sur lequel on choisit une origine, le point  $I$ .



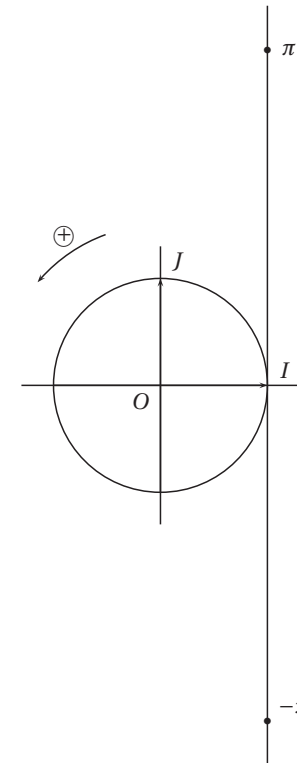
**Remarque :** Le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  est **direct** lorsqu'on se déplace sur le cercle trigonométrique de  $I$  vers  $J$  selon le trajet le plus court dans le sens direct :



### Exemple :



### 2. Enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique



Par le procédé d'enroulement de la droite numérique autour du cercle trigonométrique,

- à tout point de la droite, d'abscisse  $x$ , correspond un unique point  $M$ ,
- tout point du cercle est associé à une infinité de point de la droite numérique.

**Propriété**

Si  $x$  est un réel et  $M$  le point du cercle trigonométrique associé au réel  $x$ , alors le point  $M$  est associé à tous les réels  $x$  de la forme  $x + k \times 2\pi$ , où  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Exemple :** D'après ce qui précède, à  $x = \frac{563}{6}\pi$  correspond un point  $M$  sur le cercle trigonométrique. Trouvons la valeur  $x'$  qui correspond aussi à  $M$  et telle que  $x' \in ]-\pi; \pi]$ .

---



---



---

Mêmes questions avec  $x = -\frac{212}{3}\pi$  et  $x = \frac{148}{3}\pi$ .

---



---



---



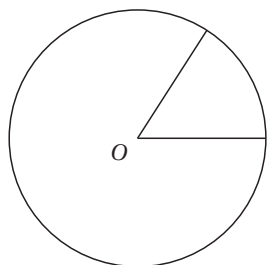
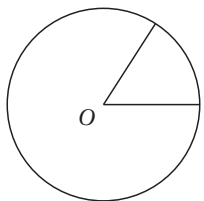
---



---

**3. Le radian****Définition**

Lorsque l'arc  $\widehat{MN}$  d'un cercle de rayon  $R$  et de centre  $O$  a pour longueur  $R$  alors l'angle  $\widehat{MON}$  vaut 1 radian.

**Conversion degré-radian**

mesure en degré	360°	180°	90°	60°	45°	30°	1°	$\frac{180^\circ}{\pi}$
en radian								

**Savoir-faire 1 Manipuler des radians**

Convertir en radian ou en degré chacun de angles suivants :

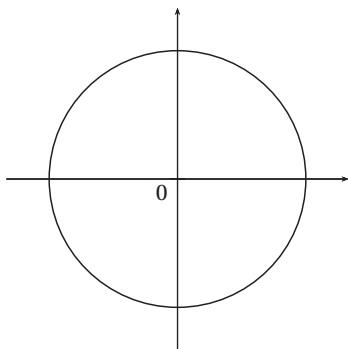
- 150° \_\_\_\_\_
- $\frac{4\pi}{3}$  rad \_\_\_\_\_
- 75° \_\_\_\_\_
- $\frac{7\pi}{6}$  \_\_\_\_\_

**II Cosinus et sinus d'un nombre réel****1. Définitions****Définition**

Soit  $x$  un réel et  $M$  le point du cercle trigonométrique qui lui correspond.

- On appelle cosinus de  $x$ , l'abscisse du point  $M$ . On le note  $\cos x$ .
- On appelle sinus de  $x$ , l'ordonnée du point  $M$ . On le note  $\sin x$ .

On définit ainsi la fonction cosinus :  $x \mapsto \cos x$  et la fonction sinus  $x \mapsto \sin x$ .

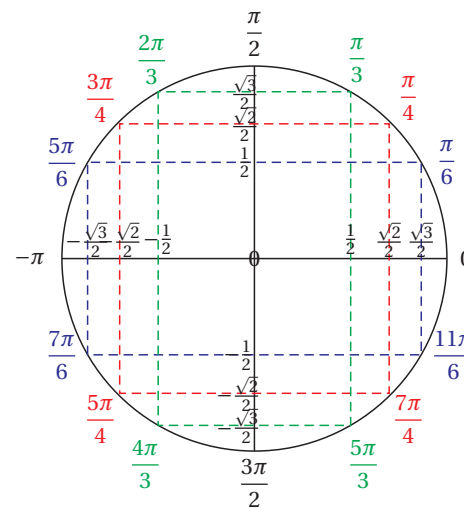


Exemple :

- \_\_\_\_\_
- \_\_\_\_\_
- \_\_\_\_\_
- \_\_\_\_\_
- \_\_\_\_\_
- \_\_\_\_\_
- \_\_\_\_\_
- \_\_\_\_\_

Valeurs remarquables

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$					
$\sin(x)$					



## 2. Propriétés

Propriété

- Pour tout réel  $x$ ,  $-1 \leq \cos(x) \leq 1$  et  $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ .
- Pour tout réel  $x$ ,  $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ .

Propriété

□ **Périodicité :**

Pour tout réel  $x$ , les points du cercle trigonométrique associés aux réels  $x$  et  $(x + 2\pi)$  sont confondus. Ainsi, on a :

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x) \quad \text{et} \quad \sin(x + 2\pi) = \sin(x).$$

On dit que les fonctions  $\cos$  et  $\sin$  sont périodiques, de période  $2\pi$ .

□ **Parité :**

- La fonction  $\cos$  est paire : Pour tout réel  $x$ ,  
 $\cos(-x) = \cos(x)$ .
- La fonction  $\sin$  est impaire : Pour tout réel  $x$ ,  
 $\sin(-x) = -\sin(x)$ .

**Remarque :**

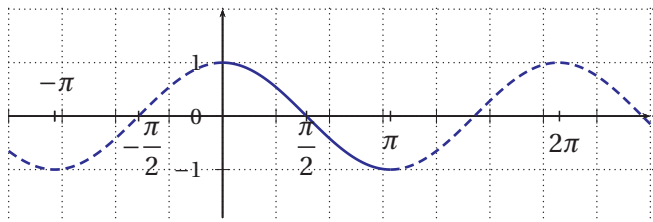
Graphiquement, « la fonction cos est paire » s'interprète par : « sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ».

Graphiquement, « la fonction sin est impaire » s'interprète par : « sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'origine ».

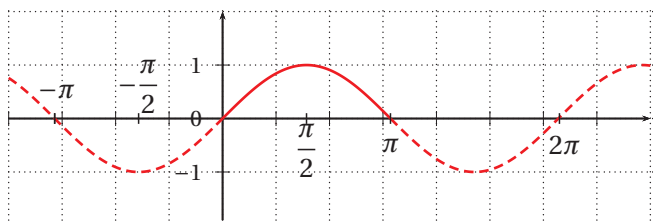
Grâce à la périodicité des fonctions cos et sin, et au fait que l'une est paire et l'autre impaire, on peut limiter l'étude des variations à l'intervalle  $[0; \pi]$ .

**Fonction cosinus**

$x$	0	$\pi$
<b>Var.</b> cos	1	-1

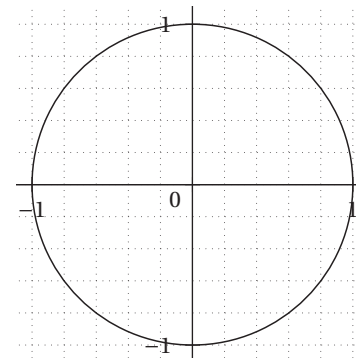
**Fonction sinus**

$x$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$
<b>Var.</b> sin	0	1	0

**III Exercices****Cercle trigonométrique****1**

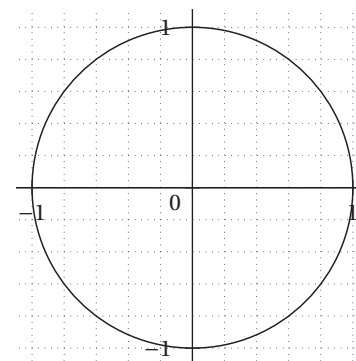
Sur le cercle trigonométrique ci-dessous, placer les réels suivants :

$$\pi; \frac{\pi}{4}; -\frac{\pi}{6}; -\frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}.$$

**2**

Sur le cercle trigonométrique ci-dessous, placer les réels suivants :

$$-\frac{\pi}{4}; -\frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{4}; \frac{14\pi}{6}.$$



3

Parmi les valeurs suivantes, quelles sont celles qui repère le même point sur le cercle trigonométrique ?

$$\frac{13\pi}{6}; -\frac{13\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; -\frac{11\pi}{6}; \frac{25\pi}{6} \text{ et } -\frac{\pi}{6}.$$

4

Pour chaque réel ci-dessous donner le réel de  $]-\pi; \pi]$  qui repère sur le cercle trigonométrique le même point.

$$1. 987569\pi \quad 2. \frac{23\pi}{4} \quad 3. -\frac{158\pi}{3} \quad 4. -\frac{784923\pi}{11}$$

5

Pour chaque réel ci-dessous donner le réel de  $]-\pi; \pi]$  qui repère sur le cercle trigonométrique le même point.

$$1. \frac{14\pi}{3} \quad 2. \frac{5423\pi}{7} \quad 3. -\frac{35\pi}{3} \quad 4. -\frac{8956\pi}{11}$$

6

Convertir les mesures suivantes en degré. Donner les valeurs exactes.

$$1. \frac{\pi}{16} \text{ rad} \quad 2. \frac{\pi}{72} \text{ rad} \quad 3. \frac{\pi}{7} \text{ rad} \quad 4. -\frac{3\pi}{8} \text{ rad}$$

7

Convertir les mesures suivantes en radian. Donner les valeurs exactes.

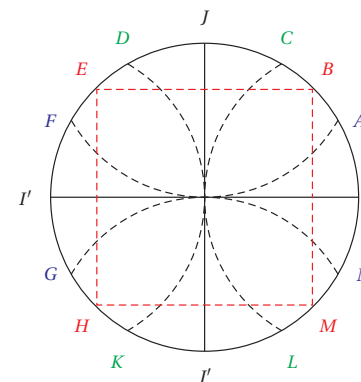
$$1. 75^\circ \quad 2. 120^\circ \quad 3. 405^\circ$$

8

En utilisant la figure ci-dessous, donner les points du cercle qui correspondent aux réels suivants :

$$1. -\frac{4\pi}{3} \quad 2. \frac{7\pi}{2} \quad 3. -\frac{11\pi}{6} \quad 4. 13\pi$$

9



9

Prendre la figure de l'exercice précédent et répondre à la même consigne avec les nombres suivants :

$$1. 2018\pi \quad 2. \frac{403\pi}{2} \quad 3. -\frac{47\pi}{3} \quad 4. \frac{109\pi}{3}$$

## Sinus, cosinus

10

Sans utiliser la calculatrice, calculer  $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin(\pi)$ .

11

Déterminer une valeur du réel  $x$  dans chacun des cas suivants :

$$1. \cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin(x) = \frac{1}{2}$$

$$2. \cos(x) = 1 \text{ et } \sin(x) = 0$$

$$3. \cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

12

$x$  est un réel tel que  $\sin(3x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

- Donner toutes les valeurs possibles pour  $3x$ .
- En déduire toutes les valeurs possibles pour  $x$ .

10

3. En déduire les solutions de l'équation  $\sin(3x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$  sur  $] -\pi; \pi ]$ .

13

Sans calculatrice, calculer les expressions suivantes :

1.  $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$

2.  $\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) - \sin(2\pi) + \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

3.  $\cos(2018\pi) - \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

4.  $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

14

Sans calculatrice, calculer les expressions suivantes :

1.  $\cos^2\left(\frac{-\pi}{13}\right) + \sin^2\left(-\frac{\pi}{13}\right)$

2.  $\cos^2\left(-\frac{\pi}{6}\right) - \sin^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

3.  $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \cos(-\pi)$

4.  $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}$

15

Soit  $x$  un réel tel que  $\cos(x) \neq 0$ . On pose  $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ .

Montrer que  $1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ .

16

Dans chacun des cas suivants, déterminer un nombre réel  $x$  vérifiant les conditions données.

1.  $\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

(a) avec  $x \in [0; \pi[$

(b) avec  $x \in ]-\pi; -\frac{\pi}{2}]$

2.  $\sin(x) = \frac{1}{2}$

(a) avec  $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right[$

(b) avec  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

17

Dans chacun des cas suivants, déterminer un nombre réel  $x$  vérifiant les conditions données.

1.  $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(a) avec  $x \in [\pi; 2\pi[$

(b) avec  $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[$

2.  $\sin(x) = -1$

(a) avec  $x \in ]-\pi; \pi]$

(b) avec  $x \in \left[\frac{35\pi}{2}; \frac{37\pi}{2}\right[$

18

En s'aidant du cercle trigonométrique répondre aux questions suivantes :

1. Donner les valeurs possibles de  $x \in ]-\pi; \pi]$  telles que  $\cos(x) \in [0; 1]$  et  $\sin(x) \in [-1; 0]$ .

2. Donner les valeurs possibles de  $x \in ]-\pi; \pi]$  telles que  $\cos(x) \in \left[\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$  et  $\sin(x) \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ .

19

En s'aidant du cercle trigonométrique répondre aux questions suivantes :

1. Donner les valeurs possibles de  $x \in [0; 2\pi[$  telles que  $\cos(x) \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{1}{2}\right]$  et  $\sin(x) \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ .

2. Donner les valeurs possibles de  $x \in [0; 2\pi[$  telles que  $\cos(x) \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$  et  $\sin(x) \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right]$ .

20

En s'aidant du cercle trigonométrique répondre aux questions suivantes :

1. Donner les valeurs possibles de  $x \in ]-7\pi; -6\pi]$  telles que  $\cos(x) \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$  et  $\sin(x) \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ .

2. Donner les valeurs possibles de  $x \in ]-7\pi; -6\pi]$  telles que  $\cos(x) \in \left[0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$  et  $\sin(x) \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ .

21

Résoudre les équations suivantes :

1.  $\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  ;

2.  $\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $x \in [-\pi; 5\pi[$  ;

3.  $\sin(x) = -\frac{1}{2}$ ,  $x \in \left[\frac{5\pi}{3}; \frac{15\pi}{2}\right[$  ;

4.  $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $x \in [0; 2\pi[$  ;

5.  $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $x \in ]-\pi; \pi]$ .

22

1. On donne  $\cos(x) = -\frac{\sqrt{5}}{4}$  avec  $x \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$ . Calculer  $\sin(x)$ .
2. On donne  $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}$  avec  $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ . Calculer  $\cos(x)$ .
3. On donne  $\cos(x) = \frac{3-\sqrt{2}}{3}$  avec  $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ . Calculer  $\sin(x)$ .
4. On donne  $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{4}$  avec  $x \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$ . Calculer  $\cos(x)$ .
5. On donne  $\cos(x) = \frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{5}$  avec  $x \in \left[\frac{11\pi}{2}; 6\pi\right]$ . Calculer  $\sin(x)$ .