Contrôle : trigonométrie

1 correction

1. Résoudre dans $[0\,;2\pi[$ l'équation $\sin(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$:

2. Résoudre dans $[0\,;2\pi[$ l'équation $\sin(2x) = \dfrac{1}{2}$:

2 correction

Résoudre les équations suivantes :

1. $\sin(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in [-\pi\,;\pi[$;

2. $\sin(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in \left[\dfrac{21\pi}{2}\,;\dfrac{23\pi}{2}\right[$;

3. $\cos(x) = \dfrac{1}{2}$, $x \in [0\,;2\pi[$;

4. $\sin(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in]-\pi\,;\pi]$.

3 correction

1. On donne $\cos(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ avec $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right]$. Calculer $\sin(x)$.

2. On donne $\sin(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ avec $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right]$. Calculer $\cos(x)$.

4 correction

Trouver les éventuels réel x tels que : $\cos(x) = -\dfrac{1}{2}$ et $x \in \left[\dfrac{35\pi}{2}\,;\dfrac{43\pi}{2}\right]$.

Correction

1 énoncé

1. $S=\left\{\dfrac{4\pi}{3}\,;\dfrac{5\pi}{3}\right\}$.

2. $S=\left\{\dfrac{\pi}{12}\,;\dfrac{5\pi}{12}\,;\dfrac{13\pi}{12}\,;\dfrac{17\pi}{12}\right\}$

2 énoncé

1. Les solutions de l'équation $\sin(x)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ dans l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$ sont $x=-\dfrac{\pi}{3}$ et $x=-\dfrac{2\pi}{3}$.

2. Résolution de l'équation $\sin(x)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ dans $\left[\dfrac{21\pi}{2}\,;\dfrac{23\pi}{2}\right[$.

- Solution dans $\mathbb{R}$: les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\sin(x)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ sont :

$$x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \text{ ou } x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

- Déterminons les solutions dans $\left[\dfrac{21\pi}{2}\,;\dfrac{23\pi}{2}\right[$.
  - *1er cas :*

$$\begin{aligned}\frac{21\pi}{2}-\frac{2\pi}{3}+2k\pi<\frac{23\pi}{2} &\iff \frac{67}{12}\leqslant k<\frac{73}{12}\\ &\iff k=6\end{aligned}$$

  - *2e cas :*

$$\frac{21\pi}{2}\leqslant-\frac{\pi}{3}+2k\pi<\frac{23\pi}{2} \iff \frac{65}{12}\leqslant k<\frac{71}{12}$$

  Aucune valeur de k ne convient.

L'ensemble des solutions est donc $S=\left\{\dfrac{34\pi}{3}\right\}$.

3. Les solutions de l'équation $\cos(x)=\dfrac{1}{2}$ dans l'intervalle $[0\,;2\pi[$ sont $x=\dfrac{\pi}{3}$ et $x=\dfrac{5\pi}{3}$.

4. Les solutions de l'équation $\sin(x)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ dans l'intervalle $[\pi\,;\pi[$ sont $x=-\dfrac{\pi}{3}$ et $x=-\dfrac{2\pi}{3}$.

3 énoncé

1. $\cos(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Déterminons les valeurs possibles de $\sin(x)$.

$$\begin{aligned}\sin^2(x)+\cos^2(x)=1 &\iff \sin^2(x)=1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\\ &\iff \sin^2(x)=\frac{2}{3}\\ &\iff \sin(x)=\frac{\sqrt{2}}{3} \quad\text{ou}\quad \sin(x)=-\frac{\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

Lorsque $x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$, on a $\sin(x)\geqslant 0$. Ainsi :

$$\sin(x)=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

2. $\sin(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. Déterminons les valeurs possibles de $\cos(x)$.

$$\begin{aligned}\sin^2(x)+\cos^2(x)=1 &\iff \cos^2(x)=1-\frac{3}{16}\\ &\iff \cos^2(x)=\frac{13}{16}\\ &\iff \cos(x)=\pm\frac{\sqrt{13}}{4}\end{aligned}$$

Lorsque $x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$, on a $\cos(x)\leqslant 0$. Ainsi :

$$\cos(x) = -\frac{\sqrt{13}}{4}$$

4 énoncé

Résolution de l'équation $\cos(x) = -\frac{1}{2}$ dans $\left[\frac{35\pi}{2}\,;\,\frac{43\pi}{2}\right]$.

- Solution dans $\mathbb{R}$: les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\cos(x) = -\frac{1}{2}$ sont :

$$x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \text{ ou } x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

- Déterminons les solutions dans $\left[\frac{35\pi}{2}\,;\,\frac{43\pi}{2}\right]$.

  - *1^er^ cas :*

$$\frac{35\pi}{2} \leqslant \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leqslant \frac{43\pi}{2} \iff \frac{101}{12} \leqslant k \leqslant \frac{125}{12}$$
$$\iff k \in \{9, 10\}$$

  - *2^e^ cas :*

$$\frac{35\pi}{2} \leqslant -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leqslant \frac{43\pi}{2} \iff \frac{109}{12} \leqslant k \leqslant \frac{133}{12}$$
$$\iff k \in \{10, 11\}$$

L'ensemble des solutions est donc $S = \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \{9,10\}\right\} \cup \left\{-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \{10,11\}\right\}$.