

Contrôle : trigonométrie

1 correction

1. Résoudre dans $[0; 2\pi[$ l'équation $\sin(x) = -\frac{1}{2}$:

2. Résoudre dans $[0; 2\pi[$ l'équation $\sin(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$:

2 correction

Résoudre les équations suivantes :

1. $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in \mathbb{R}$;

3. $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x \in \left[\frac{5\pi}{3}; \frac{15\pi}{2} \right[$;

2. $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x \in [-5\pi; \pi[$;

4. $\cos(x) = \frac{1}{2}$, $x \in [0; 2\pi[$;

3 correction

1. On donne $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ avec $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi \right]$. Calculer $\cos(x)$.

2. On donne $\sin(x) = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{4}$ avec $x \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{2} \right]$. Calculer $\cos(x)$.

4 correction

Trouver les éventuels réel x tels que : $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $x \in \left[\frac{35\pi}{2}; \frac{47\pi}{2} \right]$.

Correction

1 énoncé

1. L'ensemble des solutions de l'équation $\sin(x) = -\frac{1}{2}$ dans $[0; 2\pi[$ est : $S = \left\{ \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6} \right\}$.

2. Résolution de l'équation $\sin(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ dans $[0; 2\pi[$.

□ Solutions dans \mathbb{R} :

$$2x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ ou } 2x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ on obtient alors :}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ ou } x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

□ Déterminons les solutions qui sont dans $[0; 2\pi[$.

□ 1^{er} cas :

$$0 \leq \frac{\pi}{6} + k2\pi < 2\pi \iff -\frac{1}{6} \leq k < \frac{11}{6} \\ \iff k \in \{0, 1\}$$

□ 2^e cas :

$$0 \leq \frac{\pi}{3} + k2\pi < 2\pi \iff -\frac{1}{3} \leq k < \frac{5}{3} \\ \iff k \in \{0, 1\}$$

L'ensemble des solutions est donc $S = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right\}$.

2 énoncé

1. Les solutions de l'équation $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ dans \mathbb{R} sont $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{N}$ ou $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

2. Résolution de l'équation $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ dans $[-5\pi; \pi[$.

□ Solution dans \mathbb{R} . Les solutions dans \mathbb{R} de l'équation $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ sont :

$$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ ou } x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

□ Déterminons les solutions dans $[-5\pi; \pi[$.

□ 1^{er} cas :

$$-5\pi \leq \frac{\pi}{4} + 2k\pi < \pi \iff -\frac{21}{8} \leq k < \frac{3}{8} \\ \iff k \in \{-2, -1, 0\}$$

□ 2^e cas :

$$-5\pi \leq -\frac{\pi}{4} + 2k\pi < \pi \iff -\frac{19}{8} \leq k < \frac{5}{8} \\ \iff k \in \{-2, -1, 0\}$$

L'ensemble des solutions est donc $S = \left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \{-2, -1, 0\} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \{-2, -1, 0\} \right\}$.

3. Résolution de l'équation $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ dans $\left[\frac{5\pi}{3}; \frac{15\pi}{2} \right]$.

□ Solution dans \mathbb{R} . Les solutions dans \mathbb{R} de l'équation $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ sont :

$$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

□ Déterminons les solutions dans $\left[\frac{5\pi}{3}; \frac{15\pi}{2} \right]$.

□ 1^{er} cas :

$$\frac{5\pi}{3} \leq \frac{\pi}{4} + 2k\pi < \frac{15\pi}{2} \iff \frac{17}{24} \leq k < \frac{15\pi}{2} \\ \iff k \in \{1, 2, 3\}$$

□ 2^e cas :

$$\begin{aligned} \frac{5\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4} + 2k\pi < \frac{15\pi}{2} &\iff \frac{11}{24} \leq k < \frac{27}{8} \\ &\iff k \in \{1, 2, 3\} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $S = \left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \{1, 2, 3\} \right\} \cup \left\{ \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \{1, 2, 3\} \right\}$.

4. Les solutions de l'équation $\cos(x) = \frac{1}{2}$ dans l'intervalle $[0; 2\pi[$ sont $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{5\pi}{3}$.

3

énoncé

1. $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Déterminons les valeurs possibles de $\cos(x)$.

$$\begin{aligned} \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 &\iff \cos^2(x) = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \\ &\iff \cos^2(x) = \frac{2}{3} \\ &\iff \cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{3} \quad \text{ou} \quad \cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

Lorsque $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, on a $\cos(x) \leq 0$. Ainsi :

$$\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{3}$$

2. $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{4}$. Déterminons les valeurs possibles de $\cos(x)$.

$$\begin{aligned} \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 &\iff \cos^2(x) = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{4}\right)^2 \\ &\iff \cos^2(x) = 1 - \frac{3-2\sqrt{15}+5}{16} \\ &\iff \cos^2(x) = \frac{16-8+2\sqrt{15}}{16} \\ &\iff \cos^2(x) = \frac{4+\sqrt{15}}{8} \\ &\iff \cos(x) = \pm \frac{\sqrt{4+\sqrt{15}}}{4} \end{aligned}$$

Lorsque $x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$, on a $\cos(x) \leq 0$. Ainsi :

$$\cos(x) = -\frac{\sqrt{4+\sqrt{15}}}{4}$$

4

énoncé

Les solutions de l'équation $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ dans \mathbb{R} sont :

$$x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Déterminons les solutions dans $\left[\frac{35\pi}{2}, \frac{47\pi}{2}\right]$

1^{er} cas :

$$\begin{aligned} \frac{35\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} + k2\pi \leq \frac{47\pi}{2} \\ \frac{26}{3} \leq k \leq \frac{35}{3} \end{aligned}$$

$$8,8 \leq k \leq 11,8$$

$$k \in \{9, 10, 11\}$$

2e cas :

$$\frac{35\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{6} + k2\pi \leq \frac{47\pi}{2}$$

$$\frac{53}{16} \leq k \leq \frac{71}{6}$$

$$8,8 \leq k \leq 11,8$$

$$k \in \{9, 10, 11\}$$

Ensemble des solutions

$$S = \left\{ \frac{\pi}{6} + 18\pi, \frac{\pi}{6} + 20\pi, \frac{\pi}{6} + 22\pi, -\frac{\pi}{6} + 18\pi, -\frac{\pi}{6} + 20\pi, -\frac{\pi}{6} + 22\pi \right\}$$

$$= \left\{ \frac{109\pi}{6}, \frac{121\pi}{6}, \frac{133\pi}{6}, \frac{107\pi}{6}, \frac{119\pi}{6}, \frac{131\pi}{6} \right\}$$