Contrôle : suites numériques (2h)

1 correction

Étudier la monotonie des suites (u_n) définies pour tout entier n par :

a) $u_n = n^2 - n$

b) $\begin{cases} u_0 &= -1 \\ u_{n+1} &= -5 + u_n \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_0 &= -4 \\ u_{n+1} &= 3u_n \end{cases}$

d) $\begin{cases} u_0 &= -6 \\ u_{n+1} &= u_n - u_n^4 \end{cases}$

e) $u_n = \dfrac{7^{n+1}}{8^{n-2}}$

f) $u_n = -\dfrac{\sqrt{3} \times 2^{3n}}{3^{2n}}$

2 correction

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 6$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n - 2$.

1. (a) Calculer les cinq premiers termes de la suite (u_n).

(b) La suite (u_n) est-elle géométrique ? arithmétique ?

2. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = u_n + 3$.

(a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

(b) Donner l'expression de v_n en fonction de n.

(c) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

(d) Donner les valeurs exactes de u_7 et u_8 puis une valeur approchée à 10^{-2} près.

3 correction

Calculer les sommes suivantes :

1. $S = 5 + 2 - 1 - 4 - \ldots - 34$

2. $S = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} - \ldots - \dfrac{1}{256}$

4 correction

On suppose que a, b et c sont, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite géométrique croissante.

Déterminer ces nombres sachant que :

$$a + b + c = 260 \text{ et } c - a = 160.$$

Correction

1 énoncé

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - (n+1) - \left(n^2 - n\right) = n^2 + 2n + 1 - n - 1 - n^2 + n = 2n \geqslant 0$. La suite (u_n) est donc croissante.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} - u_n = -5 \leqslant 0$. La suite (u_n) est décroissante.

3. La suite (u_n) est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $u_0 = -4$, par conséquent l'expression de son terme général est $u_n = -4 \times 3^n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} - u_n = -4 \times 3^{n+1} + 4 \times 3^n = -4 \times 3^3 (3-1) = -8 \times 3^n \leqslant 0$. La suite (u_n) est donc décroissante.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} - u_n = -u_n^4 \leqslant 0$. La suite (u_n) est donc décroissante.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_n = 7 \times 8^2 \times \left(\frac{7}{8}\right)^n = 448 \times \left(\frac{7}{8}\right)^n$. La suite est donc géométrique de premier terme $u_0 = 448$ et de raison $q = \frac{7}{8}$. Le premier terme est positif et $0 < q < 1$ donc la suite (u_n) est décroissante.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_n = -\sqrt{3} \times \left(\frac{8}{9}\right)^n$. La suite est donc croissante.

2 énoncé

1. (a) $u_0 = 6$, $u_1 = 0$, $u_2 = -2$, $u_3 = -\frac{8}{3}$, $u_4 = -\frac{26}{9}$.

(b)

- $u_1 - u_0 = -6$ et $u_2 - u_1 = -2$ la suite n'est donc pas géométrique.
- $u_1 = 0$. si (u_n) était géométrique alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_1 \times q^{n-1} = 0$ ce qui n'est pas le cas. (u_n) n'est donc pas géométrique.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$v_{n+1} = u_{n+1} + 3 = \frac{1}{3}u_n - 2 + 3 = \frac{1}{3}u_n + 1 = \frac{1}{3}(u_n + 3) = \frac{1}{3}v_n$.

(v_n) est donc géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = 9$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3^{n-2}}$.

On en déduit l'expression de u_n en fonction de n : $u_n = \frac{1}{3^{n-2}} - 3$.

(c) $u_7 = -\frac{728}{243} \approx -3{,}00$ et

$u_8 = -\frac{2\,186}{729} \approx -3{,}00$.

3 énoncé

1. On a une suite de nombres en progression arithmétique de raison $r = -3$. On pose $u_0 = 5$, ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 5 - 3n$.

$-34 = 5 - 3n \iff n = 13$. On en déduit que

$S = u_0 + \ldots + u_{13} = 14 \times \frac{5 - 34}{2} = -203$.

2. On a une suite de nombres en progression géométrique de raison $q = -\frac{1}{2}$. On pose $u_0 = \frac{1}{2}$, ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}$.

$u_7 = \frac{(-1)^7}{2^8} = -\frac{1}{256}$. On en déduit que

$S = u_0 + \ldots + u_7 = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^8}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2^8 - 1}{3 \times 2^8} = \frac{85}{256}$.

4 énoncé

Soit q la raison de cette suite. On a $b = aq$ et $c = aq^2$, ainsi, d'une part $a + b + c = 260 \iff a\left(1 + q + q^2\right) = 260$ et d'autre part $c - a = 160 \iff a\left(q^2 - 1\right) = 160$.
La suite est croissante par conséquent $q \neq 1$ et donc $q^2 - 1 \neq 0$. On en déduit que $a = \dfrac{160}{q^2 - 1}$.
En substituant dans la première équation on obtient :

$$\begin{aligned} a\left(1 + q + q^2\right) = 260 &\iff \frac{160}{q^2 - 1}\left(1 + q + q^2\right) = 260 \\ &\iff 8\left(1 + q + q^2\right) = 13\left(q^2 - 1\right) \\ &\iff 5q^2 - 8q - 21 = 0 \end{aligned}$$

Résolvons l'équation du second degré : $5x^2 - 8x - 21 = 0$.
$\Delta = 484$, $x_1 = -\dfrac{7}{5}$ et $x_2 = 3$.
La suite étant croissante, nécessairement, $q = 3$.
$1 + 3 + 9 = 13$ donc $a = 20$, $b = 60$ et $c = 180$.