

## Contrôle : suites numériques (2h)

**1**

Étudier la monotonie des suites  $u$  définies pour tout entier  $n$  par :

a)  $u_n = n - n^2$

c) 
$$\begin{cases} u_0 &= -1 \\ u_{n+1} &= 0,3u_n \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} u_0 &= -2 \\ u_{n+1} &= 5 + u_n \end{cases}$$

d) 
$$\begin{cases} u_0 &= -2 \\ u_{n+1} &= u_n + 2u_n^2 \end{cases}$$

**2**

1. Soit deux urnes  $\mathcal{U}_1$  et  $\mathcal{U}_2$  ; la première contient 6 boules blanches et 4 boules noires, la seconde contient 8 boules blanches et 2 boules noires.

D'une des urnes, choisie au hasard (il y a équiprobabilité pour ce choix), on extrait une boule que l'on remet dans l'urne : si la boule est blanche on recommence le tirage dans le même urne, si elle est noire on recommence le tirage dans l'autre urne. Cette règle est appliquée à chaque tirage et l'on suppose qu'à l'intérieur de chaque urne les tirages sont équiprobables.

Soit  $P_n$  la probabilité pour que le  $n^{\text{ième}}$  tirage se fasse dans l'urne  $\mathcal{U}_1$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ).

(a) Déterminer  $P_1$ .

(b) Déterminer  $P_2$ .

(c) Démontrer qu'il existe une relation de récurrence vérifiée par la suite  $(P_n)$  de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P_{n+1} = aP_n + b$$

où  $a$  et  $b$  sont des réels que l'on déterminera.

2. On considère la suite  $(u_n)$  dont le terme général est défini pour  $n$  entier strictement positif par :

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + \frac{1}{5} \end{cases}$$

(a) Déterminer le réel  $\alpha$  tel que la suite  $(V_n)$ , dont le terme général est défini pour  $n$  entier strictement positif par :

$$V_n = u_n - \alpha$$

soit une suite géométrique.

(b) Exprimer  $V_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$ .

(c) En déduire la limite de la suite  $(P_n)$  quand  $n$  vers l'infini.

**3**

On considère la suite  $(u_n)$  définie pour  $n \in \mathbb{N}^*$  par :

$$\begin{cases} u_1 &= a \\ u_2 &= b \\ u_{n+2} &= \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n) \end{cases}$$

1. On pose  $w_n = u_n - u_{n-1}$ . Montrer que  $(w_n)$  est une suite géométrique.

2. Expliciter  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction  $n$ .

3. Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .

**4**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite géométrique non décroissante.

1. Sachant que :  $u_2 = -1$  et  $u_3 - u_1 = -\frac{8}{3}$ , démontrer la raison de la suite  $(u_n)$  vaut 3.

2. Expliciter  $u_n$  en fonction de  $n$ .

3. Exprimer  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$  en fonction de  $n$ .