Contrôle : suites numériques (2h)

1 correction

Étudier la monotonie des suites u définies pour tout entier n par :

a) $u_n = n - n^2$

b) $\begin{cases} u_0 &= -2 \\ u_{n+1} &= 5 + u_n \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_0 &= -1 \\ u_{n+1} &= 0,3u_n \end{cases}$

d) $\begin{cases} u_0 &= -2 \\ u_{n+1} &= u_n + 2u_n^2 \end{cases}$

2 correction

1. Soit deux urnes $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$; la première contient 6 boules blanches et 4 boules noires, la seconde contient 8 boules blanches et 2 boules noires.

D'une des urnes, choisie au hasard (il y a équiprobabilité pour ce choix), on extrait une boule que l'on remet dans l'urne : si la boule est blanche on recommence le tirage dans le même urne, si elle est noire on recommence le tirage dans l'autre urne. Cette règle est appliquée à chaque tirage et l'on suppose qu'à l'intérieur de chaque urne les tirages sont équiprobables.

Soit P_n la probabilité pour que le $n^{\text{ième}}$ tirage se fasse dans l'urne $\mathcal{U}_1$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

(a) Déterminer P_1.

(b) Déterminer P_2.

(c) Démontrer qu'il existe une relation de récurence vérifiée par la suite (P_n) de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P_{n+1} = aP_n + b$$

où a et b sont des réels que l'on déterminera.

2. On considère la suite (u_n) dont le terme général est défini pour n entier strictement positif par :

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{5}u_n + \dfrac{1}{5} \end{cases}$$

(a) Déterminer le réel α tel que la suite (V_n), dont le terme général est défini pour n entier strictement positif par :

$$V_n = u_n - \alpha$$

soit une suite géométrique.

(b) Exprimer V_n puis u_n en fonction de n.

(c) En déduire la limite de la suite (P_n) quand n vers l'infini.

3 correction

On considère la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par : $\begin{cases} u_1 &= a \\ u_2 &= b \\ u_{n+2} &= \dfrac{1}{2}(u_{n+1} + u_n) \end{cases}$

1. On pose $w_n = u_n - u_{n-1}$. Montrer que (w_n) est une suite géométrique.

2. Expliciter v_n puis u_n en fonction n.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

4 correction

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique non décroissante.

1. Sachant que : $u_2 = -1$ et $u_3 - u_1 = -\dfrac{8}{3}$, démontrer la raison de la suite (u_n) vaut 3.

2. Expliciter u_n en fonction de n.

3. Exprimer $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}$ en fonction de n.

Correction

1 énoncé

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} - u_n = (n+1) - (n+1)^2 - \left(n - n^2\right) = n + 1 - n^2 - 2n - 1 - n + n^2 = -2n \leqslant 0$. La suite (u_n) est donc décroissante.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} - u_n = 5 \geqslant 0$. La suite (u_n) est croissante.

3. La suite (u_n) est une suite géométrique de raison $0,3$ et de premier terme $u_0 = -1$, par conséquent l'expression de son terme général est $u_n = -(0,3)^n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} - u_n = -(0,3)^{n+1} + 0,3^n = 0,7 \times 0,3^n \geqslant 0$. La suite (u_n) est donc croissante.

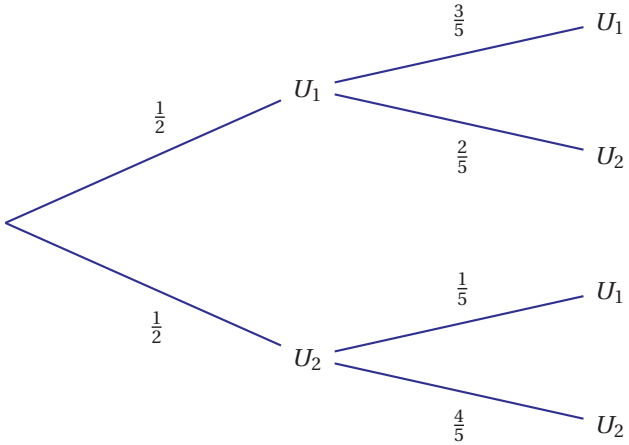
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} - u_n = 2u_n^2 \geqslant 0$. La suite (u_n) est donc croissante.

2 énoncé

1. (a) $P_1 = \dfrac{1}{2}$.

(b)
- La probabilité que l'on tire la deuxième boule dans l'urne 1, sachant que le premier tirage a eu lieu dans l'urne 1 est $\dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$ car cela signifie qu'on a eu une boule blanche ;
- La probabilité que l'on tire la deuxième boule dans l'urne 1, sachant que le premier tirage a eu lieu dans l'urne 2 est $\dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5}$ car cela signifie qu'on a eu une boule noire.

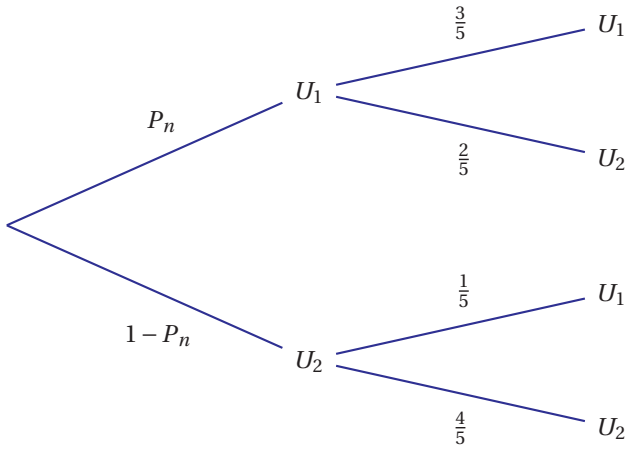
La situation peut se modéliser par l'arbre de probabilité suivant :



En appliquant la formule des probabilités totales, on obtient

$$P_2 = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{5}.$$

(c) De la même manière, on a :



D'où : $P_{n+1} = P_n \times \dfrac{3}{5} + (1 - P_n) \times \dfrac{1}{5} = \dfrac{2}{5}P_n + \dfrac{1}{5}$.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $V_{n+1} = u_{n+1} - \alpha = \dfrac{2}{5}u_n + \dfrac{1}{5} - \alpha$

Or $u_n = V_n + \alpha$, en substituant dans l'égalité précédente, on obtient :

$V_{n+1} = \dfrac{2}{5}(V_n + \alpha) + \dfrac{1}{5} - \alpha = \dfrac{2}{5}V_n + \dfrac{1}{5} - \dfrac{3}{5}\alpha$.

Pour que (V_n) soit une suite géométrique, il suffit de choisir α tel que $\dfrac{1}{5} - \dfrac{3}{5}\alpha = 0$.

En résolvant cette équation, on obtient : $\alpha = \dfrac{1}{3}$.

(V_n) est alors la suite géométrique de raison $q = \dfrac{2}{5}$ et de premier terme $V_1 = \dfrac{1}{6}$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = \dfrac{1}{6} \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^{n-1}$.

On en déduit l'expression de u_n : $u_n = \dfrac{1}{6} \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^{n-1} + \dfrac{1}{3}$.

(c) P_n tend vers donc vers $\dfrac{1}{3}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3 énoncé

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$v_{n+1} = u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(u_n + u_{n-1}) - u_n = \frac{u_{n-1}}{2} - \frac{u_n}{2} = -\frac{1}{2}(u_n - u_{n-1}) = -\frac{1}{2}v_n$.

(v_n) est donc la suite géométrique de raison $q = -\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_2 = b - a$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = (b-a) \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}$.

On remarque que $v_2 + \ldots + v_n = u_2 - u_1 + u_3 - u_2 + \ldots + u_n - u_{n-1} = u_n - u_1$.

Or $v_2 + \ldots + v_n = (b-a)\dfrac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 + \frac{1}{2}} = \dfrac{2(b-a)}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$.

On en déduit que $u_n = \dfrac{2(b-a)}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) + a$.

3. La limite est $\frac{a+2b}{3}$.

4 énoncé

1. Soit q la raison de la suite (u_n). $q \neq 0$ car sinon (u_n) serait constante et on aurait $u_3 - u_1 = 0$.

On a $u_1 = \frac{u_2}{q}$ et $u_3 = q u_2$ donc

$$\begin{aligned} u_3 - u_1 = -\frac{8}{3} &\iff q u_2 - \frac{u_2}{q} = -\frac{8}{3} \\ &\iff q^2 \times (-1) - (-1) = -\frac{8}{3}q \\ &\iff 3q^2 - 8q - 3 = 0 \end{aligned}$$

Résolvons l'équation du second degré $3x^2 - 8x - 3 = 0$:

$\Delta = 100$, on obtient deux solutions $x_1 = \frac{8-10}{6} = -\frac{1}{3}$ et $x_2 = \frac{3+10}{6} = 3$.

(u_n) est croissante donc $q \geqslant 1$, ainsi $q = 3$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_2 q^{n-2} = -3^{n-2} = -\frac{1}{9} \times 3^n$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} S_n &= -\frac{1}{9} + \left(-\frac{1}{9}\right) \times 3 + \ldots + \left(-\frac{1}{9}\right) \times 3^{n-1} = -\frac{1}{9}\left(1 + 3 + \ldots + 3^{n-1}\right) \\ &= -\frac{1}{9} \times \frac{1 - 3^n}{1 - 3} = \frac{1}{18} \times \left(3^n - 1\right). \end{aligned}$$

4. On conjecture que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$.