

Contrôle : probabilités

1 correction

Un laboratoire pharmaceutique propose des tests de dépistage de diverses maladies. Son service de communication met en avant les caractéristiques suivantes :

- la probabilité qu'une personne malade présente un test positif est 0,99 ;
- la probabilité qu'une personne saine présente un test positif est 0,001 .

1. Pour une maladie qui vient d'apparaître, le laboratoire élabore un nouveau test. Une étude statistique permet d'estimer que le pourcentage de personnes malades parmi la population d'une métropole est égal à 0,1 %. On choisit au hasard une personne dans cette population et on lui fait subir le test.

On note M l'évènement « la personne choisie est malade » et T l'évènement « le test est positif ».

- (a) Traduire l'énoncé sous la forme d'un arbre pondéré.
- (b) Démontrer que la probabilité $p(T)$ de l'évènement T est égale à $1,989 \times 10^{-3}$.
- (c) L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse.

Affirmation : « Si le test est positif, il y a moins d'une chance sur deux que la personne soit malade ».

2. Le laboratoire décide de commercialiser un test dès lors que la probabilité qu'une personne testée positivement soit malade est supérieure ou égale à 0,95. On désigne par x la proportion de personnes atteintes d'une certaine maladie dans la population.

À partir de quelle valeur de x le laboratoire commercialise-t-il le test correspondant ?

2 correction

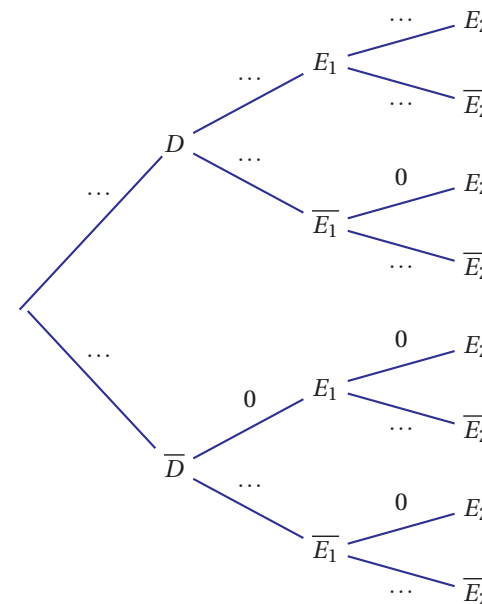
Pour embaucher ses cadres une entreprise fait appel à un cabinet de recrutement. La procédure retenue est la suivante. Le cabinet effectue une première sélection de candidats sur dossier. 40 % des dossiers reçus sont validés et transmis à l'entreprise. Les candidats ainsi sélectionnés passent un premier entretien à l'issue duquel 70 % d'entre eux sont retenus. Ces derniers sont convoqués à un ultime entretien avec le directeur des ressources humaines qui recrutera 25 % des candidats rencontrés.

On choisit au hasard le dossier d'un candidat.

On considère les évènements suivants :

- D : « Le candidat est retenu sur dossier »,
- E_1 : « Le candidat est retenu à l'issue du premier entretien »,
- E_2 : « Le candidat est recruté ».

1. Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



2. Calculer la probabilité de l'évènement E_1 .
3. On note $I = D \cap E_1$, $J = D \cap \overline{E_1}$, $K = \overline{D} \cap E_1$ et $L = \overline{D} \cap \overline{E_1}$.
Simplifier $I \cup J$ et $K \cup L$.
4. Justifier que I , J , K et L forment un système complet d'évènements.
5. On note F l'évènement « Le candidat n'est pas recruté ». Déterminer la probabilité de l'évènement F .

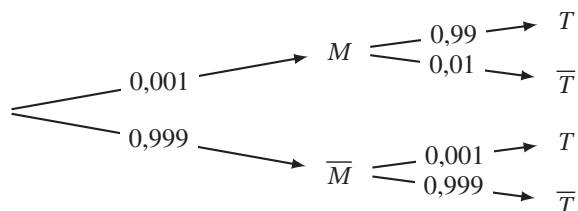
Correction

1 énoncé

1. Dans cette question (et la suivante), le choix de la personne dans la population étant fait au hasard, on est dans une situation d'équiprobabilité et donc les proportions sont assimilées à des probabilités.

(a) Le pourcentage de personnes malades étant de 0,1%, la probabilité de l'événement M sera donc de 0,001.

On obtient l'arbre pondéré suivant :



(b) On applique la loi des probabilités totales, les événements M et \bar{M} constituant un système complet d'événements :

$$P(T) = P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap T) = 0,001 \times 0,99 + 0,999 \times 0,001$$

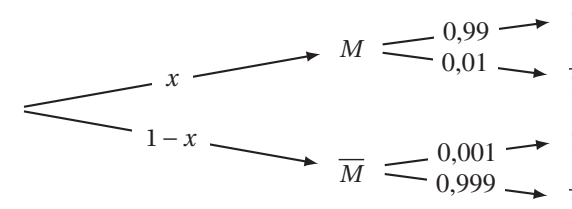
$$P(T) = 0,001 \times (0,99 + 0,999) = 1,989 \times 10^{-3}.$$

On obtient donc bien la valeur attendue.

(c) Puisque l'affirmation fait référence à la probabilité d'être malade *sachant que* le test est positif, on va calculer la probabilité conditionnelle suivante : $P_T(M) = \frac{P(T \cap M)}{P(T)} = \frac{0,001 \times 0,99}{1,989 \times 10^{-3}} \approx 0,498$.

La probabilité est inférieure à 0,5 (le dénominateur étant supérieur au double du numérateur), l'affirmation est correcte : si une personne obtient un test positif, alors la probabilité qu'elle soit effectivement malade est (légèrement) inférieure à 0,5, soit un peu moins d'une chance sur deux.

2. On reprend la même démarche, mais en modifiant les probabilités portées sur les branches de l'arbre qui devient :



On a alors : $P(T) = 0,99x + 0,001 \times (1 - x) = 0,001 + 0,989x$ et donc :

$$P_T(M) = \frac{0,99x}{0,001 + 0,989x}.$$

On rappelle que x est une proportion, donc un nombre réel compris entre 0 et 1, les probabilités données ci-dessus sont donc bien comprises entre 0 et 1 également.

La question est alors de résoudre l'inéquation suivante :

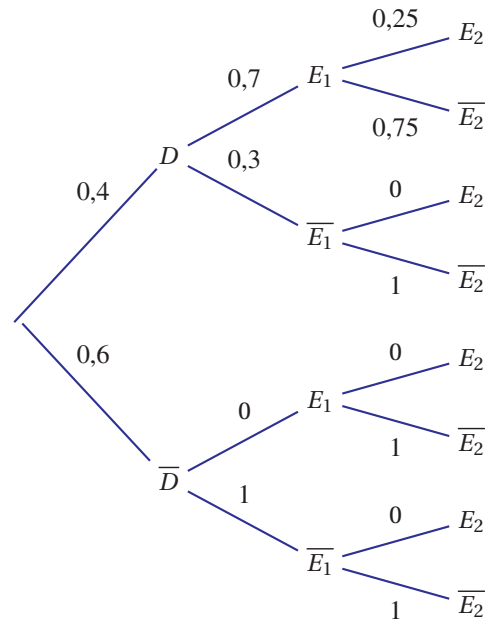
$$\begin{aligned} P_T(M) \geq 0,95 &\Leftrightarrow \frac{0,99x}{0,001 + 0,989x} \geq 0,95 \\ &\Leftrightarrow 0,99x \geq 0,95 \times (0,001 + 0,989x) \quad \text{car } 0,001 + 0,989x \geq 0. \\ &\Leftrightarrow 0,99x \geq 0,00095 + 0,93955x \\ &\Leftrightarrow 0,05045x \geq 0,00095 \\ &\Leftrightarrow x \geq \frac{0,00095}{0,05045} \quad \text{car } 0,05045 \text{ est positif.} \end{aligned}$$

Le test sera donc commercialisable à condition que la proportion x soit supérieure à $\frac{0,00095}{0,05045} =$

$\frac{19}{1009} \approx 0,01883$, c'est à dire quand le pourcentage de la population atteint par la maladie est supérieur à environ 1,88%.

2 énoncé

1.



2. On a $p(E_1) = p(D \cap E_1) = p(D) \times p_D(E_1) = 0,4 \times 0,7 = 0,28$.

3. $I \cup J = D$ et $K \cup L = \bar{D}$.

4. $I \cup J \cup K \cup L = \Omega$ et $I \cap J = \emptyset$, $I \cap K = \emptyset$, $I \cap L = \emptyset$, $J \cap K = \emptyset$, $J \cap L = \emptyset$, $K \cap L = \emptyset$.
 I , J , K et L forment donc un système complet d'événements.

5.

$$\begin{aligned}
 P(F) &= P(F \cap I) + P(F \cap J) + P(F \cap K) + P(F \cap L) \\
 &= 0,4 \times 0,7 \times 0,75 + 0,4 \times 0,3 \times 1 + 0,6 \times 0 \times 1 + 0,6 \times 1 \times 1 \\
 &= 0,93
 \end{aligned}$$