Contrôle : probabilités (1h)

1 correction

On considère deux événements A et B tels que $P(A) = 0,8 - p$, $P(B) = 0,5 - p$ et $P(A \cap B) = 0,3p$. Déterminer les éventuelles valeurs de p telles que A et B soient indépendantes (on donnera les valeurs exactes et approchées au centième).

2 correction

Une jardinerie vend de jeunes plants d'arbres qui proviennent de trois horticulteurs : 35 % des plants proviennent de l'horticulteur H_1, 25 % de l'horticulteur H_2 et le reste de l'horticulteur H_3. Chaque horticulteur livre deux catégories d'arbres : des conifères et des arbres à feuilles.
La livraison de l'horticulteur H_1 comporte 80 % de conifères alors que celle de l'horticulteur H_2 n'en comporte que 50 % et celle de l'horticulteur H_3 seulement 30 %.

1. Le gérant de la jardinerie choisit un arbre au hasard dans son stock.

On envisage les événements suivants :

- H_1 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_1 »,
- H_2 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_2 »,
- H_3 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_3 »,
- C : « l'arbre choisi est un conifère »,
- F : « l'arbre choisi est un arbre feuillu ».

(a) Construire un arbre pondéré traduisant la situation.

(b) Calculer la probabilité que l'arbre choisi soit un conifère acheté chez l'horticulteur H_3.

(c) Justifier que la probabilité de l'évènement C est égale à $0,525$.

(d) L'arbre choisi est un conifère.

Quelle est la probabilité qu'il ait été acheté chez l'horticulteur H_1 ? On arrondira à 10^{-3}.

2. Inverser l'arbre.

Correction

1 énoncé

Remarquons tout d'abord que $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$ sont des nombres compris entre 0 et 1 *i.e.* $0 \leqslant 0,8 - p \leqslant 1$, $0 \leqslant 0,5 - p \leqslant 1$ et $0 \leqslant 0,3p \leqslant 1$. Ces contraintes nous impose d'avoir $p \in I = [-0,2\,;0,5]$.

A et B sont indépendants si, et seulement si, $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$. Or,

$$\begin{aligned} P(A \cap B) = P(A)\,P(B) &\iff \big(0,8-p\big)\big(0,5-p\big) = 0,3p \text{ et } p \in I \\ &\iff p^2 - 1,6p + 0,4 = 0 \text{ et } p \in I \\ &\iff 10p^2 - 16p + 4 = 0 \text{ et } p \in I \end{aligned}$$

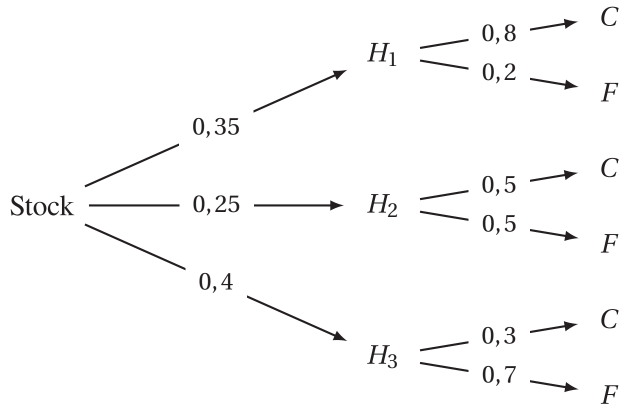
On considère l'équation du second degré $10x^2 - 16x + 4 = 0$. $\Delta = 16^2 - 4 \times 10 \times 4 = 96$, $x_1 = \dfrac{4-\sqrt{6}}{5} \approx 0,31$ et $x_2 = \dfrac{4+\sqrt{6}}{5} \approx 1,29$.

$P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$ sont des nombres compris entre 0 et 1, par conséquent $\dfrac{4+\sqrt{6}}{5}$ ne convient pas. La seule valeur possible est $p = \dfrac{4-\sqrt{6}}{5}$.

2 énoncé

Puisque le choix de l'arbre se fait au hasard dans le stock de la jardinerie, on assimile les proportions données à des probabilités.

1. (a) L'arbre pondéré traduisant cette situation est :



(b) On cherche à calculer la probabilité de l'intersection $H_3 \cap C$, donc : $P(H_3 \cap C) = P(H_3) \times P_{H_3}(C) = 0,4 \times 0,3$. On a donc $P(H_3 \cap C) = 0,12$.

(c) Puisque la jardinerie ne se fournit qu'auprès de trois horticulteurs, les événements H_1, H_2 et H_3 forment un système complet d'événements. On peut donc appliquer la loi des probabilités totales, et on en déduit :

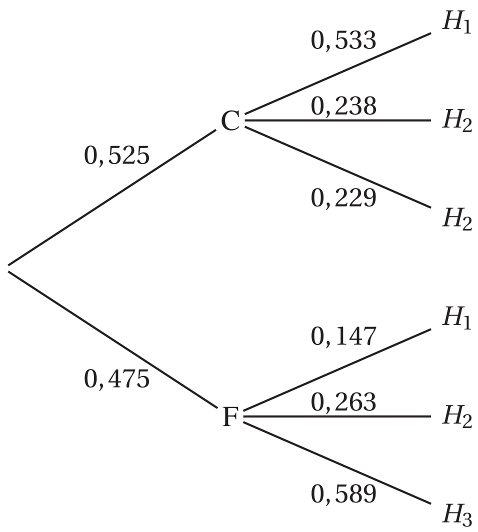
$P(C) = P(H_1) \times P_{H_1}(C) + P(H_2) \times P_{H_2}(C) + P(H_3) \times P_{H_3}(C) =$

$0,35 \times 0,8 + 0,25 \times 0,5 + 0,4 \times 0,3 = 0,525$.

(d) On cherche cette fois à calculer une probabilité conditionnelle :

$$P_C(H_1) = \frac{P(H_1 \cap C)}{P(C)} = \frac{0,35 \times 0,8}{0,525} \approx 0,533\,.$$

2. On obtient l'arbre suivant :


0,525
0,475
C
F
0,533
0,238
0,229
0,147
0,263
0,589
H_1
H_2
H_2
H_1
H_2
H_3