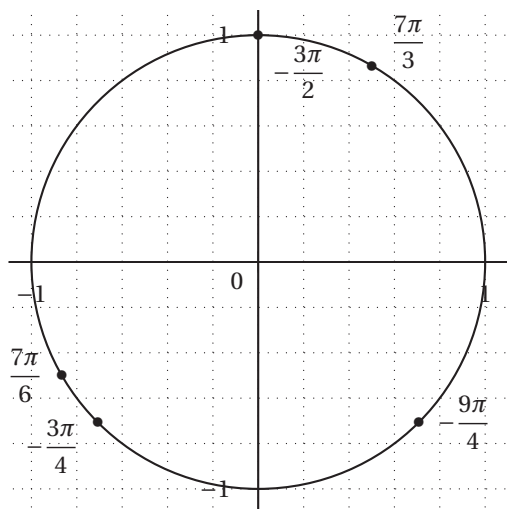


Correction

1 énoncé



2 énoncé

$$1. \frac{347\pi}{4} = \frac{347}{8} = 43,375.$$

$$\text{On enlève 43 tours : } \frac{347\pi}{4} - 43 \times 2\pi = \frac{3\pi}{4}.$$

$$2. \frac{58\pi}{3} = \frac{58}{6} \approx 9,67.$$

$$\text{On ajoute 10 tours : } \frac{58\pi}{3} + 10 \times 2\pi = \frac{2\pi}{3}.$$

$$3. \frac{1253\pi}{22} = \frac{1253}{22} \approx 56,95.$$

$$\text{On enlève 57 tours : } \frac{1253\pi}{22} - 57 \times 2\pi = -\frac{\pi}{11}$$

4. π

3 énoncé

1. $-\frac{5\pi}{6}$

2. $\frac{\pi}{2}$

3. $-\frac{3\pi}{4}$

4. $-\frac{\pi}{3}$

4 énoncé

1. $\cos^2\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \sin^2\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 0.$

2. $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{1} = 2.$

3. $\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right) \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) - \cos(-3\pi) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - (-1) = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}.$

4. $\cos^2\left(-\frac{\pi}{11}\right) + \sin^2\left(-\frac{\pi}{11}\right) = 1.$

5 énoncé

1. (a) $x = -\frac{\pi}{3}.$

(b) $x = 2\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{3}.$

2. (a) Par lecture sur le cercle trigonométrique : $x = \frac{4\pi}{3}.$

(b) x est de la forme $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. Cherchons pour quelles valeurs de k on a $x \in \left[\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right].$

□ Premier cas : $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$.

$$\begin{aligned} \frac{7\pi}{2} &\leq -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq \frac{9\pi}{2} \\ \frac{7}{2} + \frac{1}{3} &\leq 2k \leq \frac{9}{2} + \frac{1}{3} \\ \frac{23}{12} &\leq k \leq \frac{29}{12} \end{aligned}$$

$\frac{23}{12} \approx 1,92$ et $\frac{29}{12} \approx 2,42$. Ainsi, pour cette inéquation la seule valeur de k convient est $k = 2$. Avec cette valeur, on calcule $x = -\frac{\pi}{3} + 2 \times 2\pi = \frac{11\pi}{3}$.

□ Deuxième cas : $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$.

$$\begin{aligned} \frac{7\pi}{2} &\leq -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq \frac{9\pi}{2} \\ \frac{7}{2} + \frac{2}{3} &\leq 2k \leq \frac{9}{2} + \frac{2}{3} \\ \frac{25}{12} &\leq k \leq \frac{31}{12} \end{aligned}$$

Comme $\frac{25}{12} \approx 2,08$ et $\frac{31}{12} \approx 2,58$, aucune valeur de k ne convient pour cette inéquation.

6

énoncé

1. Démontrons le résultat plus général : soit m et n des réels tels que $m^2 + n^2 \neq 0$,

$$\exists x \in \mathbb{R}, m \sin(x) + n \cos(x) = l \iff m^2 + n^2 \geq l^2.$$

l'expression (E) $m \sin(x) + n \cos(x) = l$ peut se réécrire $\frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}} \sin(x) + \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}} = \frac{l}{\sqrt{m^2 + n^2}}$.

Considérons le point $M\left(\frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}}, \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}}\right)$. Le point M est sur le cercle trigonométrique, par conséquent, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $M(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$. On en déduit que $\cos(\alpha) = \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}}$ et $\sin(\alpha) = \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}}$.

(E) peut donc se réécrire $\cos(\alpha) \sin(x) + \sin(\alpha) \cos(x) = \frac{l}{\sqrt{m^2 + n^2}}$.

Or $\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \sin(b) \cos(a)$.

Pour ceux qui ne connaissent pas cette formule voici une démonstration élémentaire (sans utilisation du produit scalaire).

On considère le triangle ABC , rectangle en A tel que $\widehat{ABC} = a$ et $\overline{BC} = 1$. Puis le triangle BCD , rectangle en C et tel que $\widehat{CBD} = b$.

Il s'agit d'évaluer $\sin(a + b)$ en considérant le triangle BDE rectangle en E .

On a $DB = \frac{1}{\cos(b)}$ et $CD = \tan(b)$.

On montre facilement que $\widehat{CDH} = a$ et donc $DH = \frac{\tan(b)}{\cos(a)}$ et $CH = \tan(a) \tan(b)$.

On en déduit que $HB = 1 - \tan(a) \tan(b)$ puis $HE = \sin(a) (1 - \tan(a) \tan(b))$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} \sin(a + b) &= \frac{DH + HE}{DB} \\ &= \cos(b) \left(\frac{\tan(b)}{\cos(a)} + \sin(a) (1 - \tan(a) \tan(b)) \right) \\ &= \frac{\sin(b)}{\cos(a)} + \sin(a) \cos(b) - \frac{\sin^2(a) \sin(b)}{\cos(a)} \\ &= \sin(b) \frac{1 - \sin^2(a)}{\cos(a)} + \sin(a) \cos(b) \\ &= \sin(a) \cos(b) + \sin(b) \cos(a) \end{aligned}$$

