Contrôle : suites (2h)

1 correction

Étudier la monotonie des suites u définies pour tout entier n par :

a) $u_n = n - n^2$

b) $\begin{cases} u_0 & = -2 \\ u_{n+1} & = 5 + u_n \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_0 & = -1 \\ u_{n+1} & = 0,3u_n \end{cases}$

d) $\begin{cases} u_0 & = -2 \\ u_{n+1} & = u_n + 2u_n^2 \end{cases}$

2 correction

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de premier terme 3 et de raison -4.

Déterminer u_7, u_{18} et $\displaystyle\sum_{i=7}^{18} u_i$.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite géométrique de premier terme 5 et de raison $-\dfrac{1}{2}$.

Déterminer u_7, u_{18} et $\displaystyle\sum_{i=7}^{18} u_i$.

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique. On donne $u_4 = 7$ et $u_7 = 1$.

Déterminer la raison et le premier terme de cette suite.

4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique. On donne $u_4 = 4$ et $u_7 = 108$.

Déterminer la raison et le premier terme de cette suite.

3 correction

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n + \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

1. La suite (u_n) est-elle géométrique ?

2. Étudier les variations de la suite (u_n).

3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} - u_n$.

(a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$.

(b) Exprimer v_n en fonction de n.

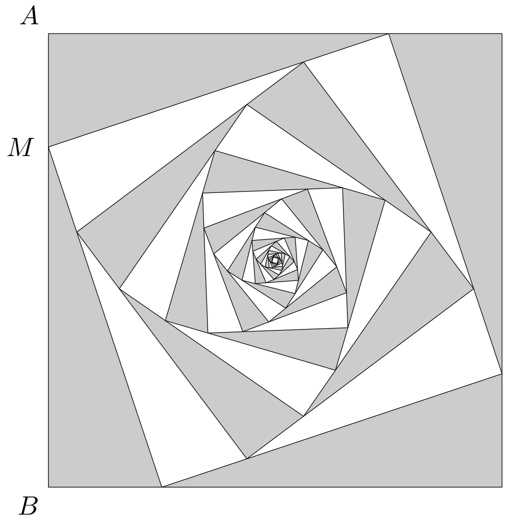
(c) Calculer $S_n = v_0 + v_2 + \ldots + v_n$ en fonction de n.

(d) En déduire l'expression de u_{n+1} puis de u_n en fonction de n.

4 correction

Quelle est la surface de l'aire grisée sur la figure ci-contre ?

Données : $AB = 6$ cm et $AM = \dfrac{1}{4}AB$.



5 correction

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite dont tous les termes sont des réels strictement positifs et tels que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\quad u_k - 2u_{k+1} + u_{k+2} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{k} u_i \leqslant 1.$$

Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\quad 0 \leqslant u_k - u_{k+1} \leqslant \frac{2}{k^2}.$$

Correction

1 énoncé

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} - u_n = (n+1) - (n+1)^2 - \left(n - n^2\right) = n + 1 - n^2 - 2n - 1 - n + n^2 = -2n \leqslant 0$. La suite (u_n) est donc décroissante.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} - u_n = 5 \geqslant 0$. La suite (u_n) est croissante.

3. La suite (u_n) est une suite géométrique de raison $0,3$ et de premier terme $u_0 = -1$, par conséquent l'expression de son terme général est $u_n = -(0,3)^n$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} - u_n = -(0,3)^{n+1} + 0,3^n = 0,7 \times 0,3^n \geqslant 0$. La suite (u_n) est donc croissante.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} - u_n = 2u_n^2 \geqslant 0$. La suite (u_n) est donc croissante.

2 énoncé

1.
- $u_7 = 3 - 4 \times 7 = -25$
- $u_{18} = 3 - 4 \times 18 = -69$
- $\displaystyle\sum_{i=7}^{18} u_i = (18 - 7 + 1) \times \frac{-25 - 69}{2} = -564$

2.
- $u_7 = 5 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^7 = -\frac{5}{128}$
- $u_{18} = 5 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{18} = \frac{5}{26144}$
- $\displaystyle\sum_{i=7}^{18} u_i = -\frac{5}{128}\,\frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{12}}{1 + \frac{1}{2}} = -\frac{5}{128} \times \frac{2}{3} \times \frac{2^{12} - 1}{2^{12}} = -\frac{6825}{262144} \approx -0,026$

3. D'une part

$$u_7 = u_4 + (7-4)\,r$$

$$1 = 7 + 3r$$

$$r = -2,$$

d'autre part,

$$u_4 = u_0 - 2 \times 4$$

$$u_0 = 15.$$

4. D'une part

$$u_7 = u_4 q^3$$

$$108 = 4q^3$$

$$q^3 = 27$$

$$q = 3,$$

d'autre part,

$$u_4 = u_0 \times 3^4$$

$$u_0 = \frac{4}{3^4} = \frac{4}{81}.$$

3 énoncé

1. Un rapide calcul donne $\frac{u_1}{u_0} = 2$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{4}{3}$. $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$, par conséquent, la suite (u_n) n'est pas géométrique.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \geqslant 0$. La suite (u_n) est donc croissante.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\frac{2}{3} v_n &= \frac{2}{3}(u_{n+1} - u_n)\\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\\ &= u_{n+2} - u_{n+1}\\ &= v_{n+1}\end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. $\frac{2}{3} \neq 1$ donc

$$S_n = \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} = 3\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right).$$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$S_n = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \ldots + (u_{n+1} - u_n) = u_{n+1} - u_0,$$

d'où

$$u_{n+1} = 1 + 3\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$$

puis

$$u_n = 1 + 3\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\right).$$

4 énoncé

- Soit (A_n) la suite des aires des carrés de la figure et $n \in \mathbb{N}$.
  Si A_n est l'aire du $n+1-$ième carré alors
  $$A_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{A_n}}{4}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{A_n}}{4}\right)^2 = \frac{10A_n}{16} = \frac{5A_n}{8}.$$
  La suite (A_n) est donc une suite géométrique de raison $\frac{5}{8}$ et de premier terme $A_0 = 36$.
  On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = 36 \times \left(\frac{5}{8}\right)^n$.
- Pour un carré d'arête a, l'aire grisée vaut :
  $$\frac{a}{4} \times \frac{3}{4}a \times \frac{1}{2} \times 4 = \frac{3a^2}{8}.$$
  Si (u_n) est la suite des aires grisées des carrés de la figure alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, étant donné que les carrés ne sont grisés qu'une fois sur deux :
  $$u_n = \frac{3}{8}A_{2n} = \frac{3}{8} \times 36\left(\frac{5}{8}\right)^{2n} = \frac{27}{2}\left(\frac{25}{64}\right)^n.$$

L'aire cherchée est donc la limite de la somme

$$S_n = u_0 + \ldots + u_n = \frac{27}{2}\,\frac{1-\left(\frac{25}{64}\right)^{n+1}}{1-\frac{25}{64}} = \frac{288}{13}\left(1-\left(\frac{25}{64}\right)^{n+1}\right).$$

Comme $0 \leqslant \frac{25}{64} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{25}{64}\right)^{n+1} = 0$. On en déduit que l'aire cherchée vaut $\frac{288}{13}$.

5 énoncé

1. Montrons que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant u_k - u_{k+1}$.

Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n - u_{n+1} < 0$. Ceci revient à supposer l'existence d'un réel $\alpha < 0$ tel que $u_n - u_{n+1} \leqslant \alpha < 0$.

D'après l'énoncé, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_{k+1} - u_{k+2} \leqslant u_k - u_{k+1}$. Il s'en suit que, pour tout $m \geqslant n$,

$$u_n - u_m = (u_n - u_{n+1}) + (u_{n+1} - u_{n+2}) \ldots + (u_{m-1} - u_m) \leqslant (m-n)\,\alpha.$$

On obtient alors

$$u_n - (m-n)\,\alpha \leqslant u_m.$$

Comme $\alpha < 0$, $-(m-n)\,\alpha > 0$ et pour m suffisamment grand $u_m > 1$ ce qui est impossible car les termes de (u_n) sont strictement positifs et $\sum\limits_{i=1}^{k} u_i \leqslant 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2. Montrons que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u_k - u_{k+1} \leqslant \frac{2}{k^2}$.

Supposons qu'il existe un rang n tel que $\frac{2}{n^2} \leqslant u_n - u_{n+1}$. Pour tout $m \leqslant n$ et $m \geqslant 1$,

$$\frac{2}{n^2} \leqslant u_n - u_{n+1} \leqslant u_{n-1} - u_n \leqslant \ldots \leqslant u_m - u_{m-1},$$

ce qui donne en sommant les inégalités et en télescopant les termes :

$$\frac{2}{n^2}(n-m+1) + u_{n+1} \leqslant u_m.$$

En sommant ces inégalités pour m allant de 1 à n on obtient :

$$nu_{n+1} + (1+2+\ldots+n)\,\frac{2}{n^2} \leqslant \sum_{i=1}^{n} u_i.$$

$(1+\ldots+n)\,\frac{2}{n^2} = \frac{n\,(n+1)}{n^2} = \frac{n+1}{n} > 1$, il en découle que $\sum\limits_{i=1}^{n} u_i > 1$, ce qui contredit l'hypothèse.