Contrôle : second degré

1 correction

Soient f et g les fonctions polynôme du second degré définies par $f(x) = -4x^2 - 3x + 10$ et $g(x) = 3x^2 - 4x + 5$.

1. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

2. Résoudre l'inéquation $f(x) < 0$.

3. Déterminer et justifier le plus grand ensemble de définition possible pour une fonction h dont l'expression est $h(x) = \sqrt{-4x^2 - 3x + 10}$.

4. Résoudre l'équation $g(x) = 0$.

5. Résoudre l'inéquation $g(x) \geqslant 0$.

6. Si cela est possible, factoriser $f(x)$ et $g(x)$.

2 correction

Résoudre l'inéquation suivante :

$$\frac{-3x^2 + 9x + 30}{2x^2 + 2x - 12} \leqslant 0.$$

3 correction

Résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} x + y = -7 \\ xy = 10 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 3 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} x - y = -6 \\ xy = 9 \end{cases}$

4 correction

On dispose d'une ficelle longue de 1 mètre que l'on coupe en deux. Avec un des morceaux on forme un carré, et avec l'autre, on forme un rectangle dont la longueur est le triple de sa largeur.
Objectif : minimiser la somme des aires du carré et du rectangle.

1. (a) Montrer que l'aire du carré est égale à $\frac{1}{16}x^2$.

(b) Montrer que l'aire du rectangle vaut $\frac{3}{64}(1-x)^2$.

2. (a) Montrer que $\frac{x^2}{16} + \frac{3}{64}(1-x)^2 = \frac{7x^2 - 6x + 3}{64}$.

(b) Mettre sous forme canonique le trinôme $7x^2 - 6x + 3$.

(c) En déduire la forme canonique du trinôme $\frac{7x^2 - 6x + 3}{64}$.

(d) Déterminer la valeur minimale de la somme des aires du carré et du rectangle et pour quelle valeur de x elle est atteinte.

Correction

1 énoncé

1. $f(x)=0 \iff -4x^2-3x+10=0.$

$\Delta=169,\ \ x_1=-2$ et $x_2=\dfrac{5}{4}.$

2. Comme $-4<0$, le tableau de signes est :

x	$-\infty$		-2		$\frac{5}{4}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

3. h est définie si, et seulement si, $-4x^2-3x+10\geqslant 0$, ainsi $\mathcal{D}_h=\left[-2\,;\dfrac{5}{4}\right].$

4. $g(x)=0 \iff 3x^2-4x+5=0.$

$\Delta=-44$, cette équation n'a pas de solution.

5. $g(x)\geqslant 0 \iff x\in\mathbb{R}.$

6.
- D'après ce qui précède, $f(x)=-4(x+2)\left(x-\dfrac{5}{4}\right).$
- $g(x)$ ne se factorise pas davantage.

2 énoncé

- Valeurs interdites :

  $2x^2+2x-12=0 \iff x^2+x-6=0.$

  $\Delta=25,\ \ x_1=2$ et $x_2=-3.$

- Étude du numérateur :

  $-3x^2+9x+30=0 \iff x^2-3x-10=0.$

  $\Delta=49,\ \ x_1=5$ et $x_2=-2.$

- Tableau de signes :

x	$-\infty$		-3		-2		2		5		$+\infty$
$-3x^2+9x+30$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	
$2x^2+2x-12$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$\dfrac{-3x^2+9x+30}{2x^2+2x-12}$		$-$	||	$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	

- Conclusion :

$$\frac{-3x^2+9x+30}{2x^2+2x-12}\leqslant 0 \iff x\in\,]-\infty\,;-3[\,\cup\,[-2\,;2[\,\cup\,[-2\,;2[\,\cup\,[5\,;+\infty[.$$

3 énoncé

1. x et y sont solutions de l'équation $X^2+7X+10=0.$

$\Delta=9,\ \ X_1=-5$ et $X_2=-2.$

L'ensemble des solutions est : $S=\left\{(-5\,;-2),(-2\,;-5)\right\}.$

2. x et y sont solutions de l'équation $X^2-2X+3=0.$

$\Delta=-8.$ Aucun couple n'est solution de ce système.

3. Posons $X=x$ et $Y=-y$. Le système devient : $\begin{cases} X+Y=-6\\ XY=-9\end{cases}.$

X et Y sont donc solutions de l'équation $Z^2+6Z-9=0.$

$\Delta=72,\ \ Z_1=-3-3\sqrt{2}$ et $Z_2=-3+3\sqrt{2}.$

Ainsi $(X,Y)=\left(-3-3\sqrt{2},-3+3\sqrt{2}\right)$ ou $(X,Y)=\left(-3+3\sqrt{2},-3-3\sqrt{2}\right).$

On en déduit que :

$(x,y)=\left(-3-3\sqrt{2},3-3\sqrt{2}\right)$ ou $(x,y)=\left(-3+3\sqrt{2},3+3\sqrt{2}\right).$

4 énoncé

1. (a) La longueur d'un coté est $\frac{x}{4}$, l'aire du carré vaut donc $\left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{16}$.

(b) Notons L la largeur du rectangle et l sa longueur. D'après l'énoncé, nous avons :

$$\begin{cases} 2L + 2l = 1 - x \\ l = 3L \end{cases} \iff \begin{cases} 4L = \frac{1-x}{2} \\ l = 3L \end{cases} \iff \begin{cases} L = \frac{1-x}{8} \\ l = \frac{3(1-x)}{8} \end{cases}$$

On en déduit l'expression de l'aire du rectangle :

$$L \times l = \frac{3(1-x)^2}{64}.$$

2. (a)

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\text{carré}} + \mathcal{A}_{\text{rectangle}} &= \frac{x^2}{16} + \frac{3}{64}(1-x)^2 \\ &= \frac{x^2}{16} + \frac{3}{64}\left(1 - 2x + x^2\right) \\ &= \frac{x^2}{16} + \frac{3}{64} - \frac{6x}{64} + \frac{3x^2}{64} \\ &= \frac{7x^2 - 6x + 3}{64} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} 7x^2 - 6x + 3 &= 7\left(x^2 - \frac{6}{7}x + \frac{3}{7}\right) \\ &= 7\left(\left(x - \frac{3}{7}\right)^2 - \frac{9}{49} + \frac{3}{7}\right) \\ &= 7\left(\left(x - \frac{3}{7}\right)^2 + \frac{12}{49}\right) \\ &= 7\left(x - \frac{3}{7}\right)^2 + \frac{3}{112} \end{aligned}$$

(c) $\frac{7x^2 - 6x + 3}{64} = \frac{7}{64}\left(x - \frac{3}{7}\right)^2 + \frac{3}{112}$.

(d) $\frac{7x^2 - 6x + 3}{64}$ est la somme de deux nombres positifs. Cette somme est minimale lorsque $\frac{7}{64}\left(x - \frac{3}{7}\right)^2$ est nulle *i.e.* pour $x = \frac{3}{7}$. L'aire minimale vaut donc $\frac{3}{112}$.