

Contrôle : probabilités conditionnelles (1 h 30)

1 correction

Les résultats seront donnés sous forme décimale en arrondissant à 10^{-4} .

Dans un pays, il y a 2 % de la population contaminée par un virus.

On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :

- La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,99 (sensibilité du test).
- La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,97 (spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.

On note V l'évènement « la personne est contaminée par le virus » et T l'évènement « le test est positif ».

\bar{V} et \bar{T} désignent respectivement les évènements contraires de V et T .

1. (a) Préciser les valeurs des probabilités $P(V)$, $P_V(T)$, $P_{\bar{V}}(\bar{T})$.

Traduire la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.

(b) En déduire la probabilité de l'évènement $V \cap T$.

2. Démontrer que la probabilité que le test soit positif est 0,0492.

3. (a) Justifier par un calcul la phrase :

« Si le test est positif, il n'y a qu'environ 40 % de « chances » que la personne soit contaminée ».

(b) Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif.

2 correction

Jeanne prend son parapluie pour se rendre au travail un jour sur dix.

Elle a remarqué que lorsqu'elle avait son parapluie, il pleuvait dans 80 % des cas et, lorsqu'elle ne l'avait pas, il pleuvait dans 15 % des cas.

1. Montrer que la probabilité de l'évènement B : « Il pleut » est égale à 0,215.

2. Les évènements A : « Jeanne prend son parapluie » et B sont-ils indépendants ?

3 correction

Dans un club d'arts martiaux, la moitié des adhérents pratique le judo, le tiers le karaté, les autres l'aïkido. Pour chaque adhérent, une seule activité est possible parmi les trois proposées. Les kimono sont identiques pour le judo et l'aïkido, mais différents pour le karaté.

1. On choisit au hasard un adhérent portant un kimono de type « judo ».

Quelle est la probabilité qu'il pratique effectivement le judo ?

2. Un judoka du club sur dix est ceinture noire, contre un aikidoka sur huit et un karatéka sur six.

On choisit au hasard un adhérent du club.

Quelle est la probabilité qu'il soit ceinture noire dans sa discipline ?

3. Un adhérent porte une ceinture noire et un kimono de type « judo ».

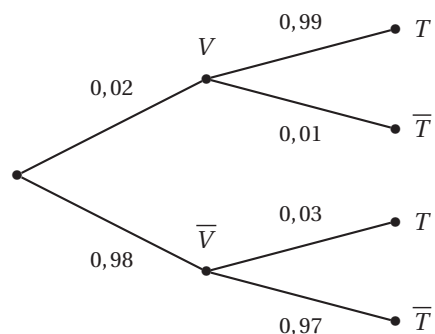
Quelle est la probabilité qu'il soit aikidoka ?

Correction

1 énoncé

1. (a) D'après l'énoncé, on a : $P(V) = 0,02$; $P_V(T) = 0,99$; $P_{\bar{V}}(\bar{T}) = 0,97$.

Traduisons la situation par un arbre de probabilités :



(b) $P(V \cap T) = P_V(T) \times P(V) = 0,99 \times 0,02 = 0,0198$

2. Par conséquent : $P(T) = P(T \cap V) + P(T \cap \bar{V}) = P(V) \times P_V(T) + P(\bar{V}) \times P_{\bar{V}}(T)$ (formule des probabilités totales).

Alors : $P(T) = 0,99 \times 0,02 + 0,03 \times 0,98 = 0,0492$.

3. (a) Il faut calculer $P_T(V)$. Or : $P_T(V) = \frac{P(V \cap T)}{P(T)} = \frac{0,0198}{0,0492} \approx 0,4024$, soit environ 40%.

Il n'y a bien qu'environ 40 % de « chances » que la personne soit contaminée », sachant que le test est positif.

(b) La probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est

négatif est $P_{\bar{T}}(\bar{V}) = \frac{P(\bar{V} \cap \bar{T})}{P(\bar{T})} = \frac{0,97 \times 0,98}{1 - 0,0492} \approx 0,9997$, c'est-à-dire environ 99,97 %.

2 énoncé

1. A et \bar{A} forment un système complet d'événements donc :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$$

$$= 0,1 \times 0,8 + 0,9 \times 0,15$$

$$= 0,215$$

2. $P_A(B) = 0,8 \neq P(B)$ donc les événements ne sont pas indépendants.

3 énoncé

On note

- J l'événement « l'adhérent pratique le judo » ;
- K l'événement « l'adhérent pratique le karaté » ;
- A l'événement « l'adhérent pratique l'aïkido » ;
- Kj l'événement « l'adhérent porte un kimono de type judo/aïkido » ;

$$1. P_{Kj}(J) = \frac{P(Kj \cap J)}{P_{Kj}}$$

On a $J \subset Kj$ donc $P(Kj \cap J) = P(J) = \frac{1}{2}$. Ainsi,

$$P_{Kj}(J) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}$$

2. J , K et A forment un système complet d'événements, par conséquent, la formule des probabilités totales donne :

$$P(N) = P(J \cap N) + P(K \cap N) + P(A \cap N)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{10} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{8}$$

$$= \frac{91}{720} \approx 0,126$$

$$3. P_{N \cap K_j}(A) = \frac{P(K_j \cap A \cap N)}{P(K_j \cap N)}.$$

□ Calcul de $P(K_j \cap A \cap N)$:

$$\begin{aligned} P(K_j \cap A \cap N) &= P(K_j \cap A) P_{K_j \cap A}(N) \\ &= P(K_j) P_{K_j(A)} P_{K_j \cap A}(N) \end{aligned}$$

Comme $A \subset K_j$, $P_{K_j \cap A}(N) = P_A(N) = \frac{1}{8}$.

De $P_{K_j}(J) + P_{K_j}(A) = 1$ et la question 1. on en déduit que $P_{K_j}(A) = \frac{1}{4}$ et comme $\frac{2}{3}$ des adhérents portent un kimono de type judo, il vient :

$$P(K_j \cap A \cap N) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{48}$$

□ Calcul de $P(K_j \cap N)$:

$$\begin{aligned} P(K_j \cap N) &= P((K_j \cap N \cap A) \cup (K_j \cap N \cap J)) \\ &= P(K_j \cap N \cap J) + P(K_j \cap N \cap A) \text{ car } J \cap A = \emptyset \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{10} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} \\ &= \frac{17}{240} \end{aligned}$$

$$\text{On en déduit : } P_{N \cap K_j}(A) = \frac{\frac{1}{48}}{\frac{17}{240}} = \frac{5}{17}.$$