Contrôle : racines n-ième de l'unité

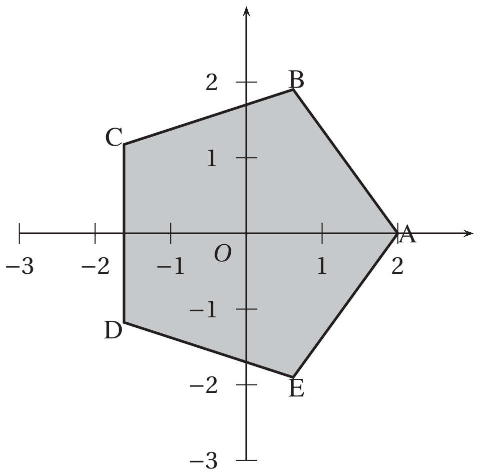
1 correction

Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation :

$$z^4 = \sqrt{3} - \mathrm{i}.$$

2 correction

Suite à l'invasion du Groenland par les États-Unis, vous décidez de mener une attaque contre le pentagone. Aide nos valeureux généraux en déterminant les affixes des sommets du polygone régulier dessiné sur la figure ci-dessous.



3 correction

Résoudre de deux façons différentes l'équation : $(1+\mathrm{i}z)^5 = (1-\mathrm{i}z)^5$ et en déduire la valeur de $\tan\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$.

Ind : $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.

Correction

1 énoncé

$$\begin{aligned} z^4=\sqrt{3}-\mathrm{i} &\iff z^4=2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\\ &\iff z^4=\left(2^{\frac14}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{24}}\right)\\ &\iff \left(\frac{z}{2^{\frac14}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{24}}}\right)^4=1\\ &\iff \frac{z}{2^{\frac14}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{24}}}\in\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{4}},\ k\in[\![0;3]\!]\right\}\\ &\iff z\in\left\{2^{\frac14}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{2k\pi}{4}-\frac{\pi}{24}\right)},\ k\in[\![0;3]\!]\right\}\\ &\iff z\in\left\{2^{\frac14}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\frac{12k-1}{24}},\ k\in[\![0;3]\!]\right\}\end{aligned}$$

2 énoncé

Pour aider nos généraux on peut résoudre l'équation $z^5=1$ puis multiplier par 2 les solutions ou résoudre l'équation $\left(\frac{z}{2}\right)^5=1$. L'ensemble des solutions est :

$$\left\{2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{5}},\ k\in[\![0;4]\!]\right\}.$$

3 énoncé

Méthode 1 : L'équation équivaut à

$$\left(\frac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}\right)^5=1,$$

car $-\mathrm{i}$ n'est pas solution. Par suite, z en est solution si, et seulement si, l'on peut trouver $k\in[\![0;4]\!]$ tel que :

$$\frac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}=\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi k}{5}}.$$

Comme $\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi k}{5}}\neq-1$, cela équivaut à :

$$z=\frac{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi k}{5}}-\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi k}{5}}}{\mathrm{i}\left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi k}{5}}+\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi k}{5}}\right)}=\frac{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi k}{5}}-\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi k}{5}}}{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi k}{5}}+\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi k}{5}}}=\tan\frac{k\pi}{5}.$$

Méthode 2 : On développe en utilisant la formule du binôme. Pour tout nombre complexe u, on a $(1+u)^5=u^5+5u^4+10u^3+10u^2+5u+1$. L'équation équivaut donc à :

$$\mathrm{i}z^5+5z^4-10\mathrm{i}z^3-10z^2+5\mathrm{i}z+1=-\mathrm{i}z^5+5z^4+10\mathrm{i}z^3-10z^2-5\mathrm{i}z+1,$$

c'est-à-dire à :

$$z(z^4-10z^2+5)=0,$$

qui se résout facilement (si $z\neq0$, z^2 est solution d'une équation du second degré). On trouve comme solutions :

$$\left\{-\sqrt{5+2\sqrt{5}},\quad -\sqrt{5-2\sqrt{5}},\quad 0,\quad \sqrt{5-2\sqrt{5}},\quad \sqrt{5+2\sqrt{5}}\right\}.$$

Comme $\tan\frac{\pi}{5}\in]0,1]$, on a

$$\tan\frac{\pi}{5}=\sqrt{5-2\sqrt{5}}.$$